Karlsruhe Institute of Technology

Robotik I: Einführung in die Robotik
Übung 1: Mathematische Grundlagen (Rest)
Übung 2: Kinematik

Fabian Paus, Tamim Asfour
Institut für Anthropomatik und Robotik

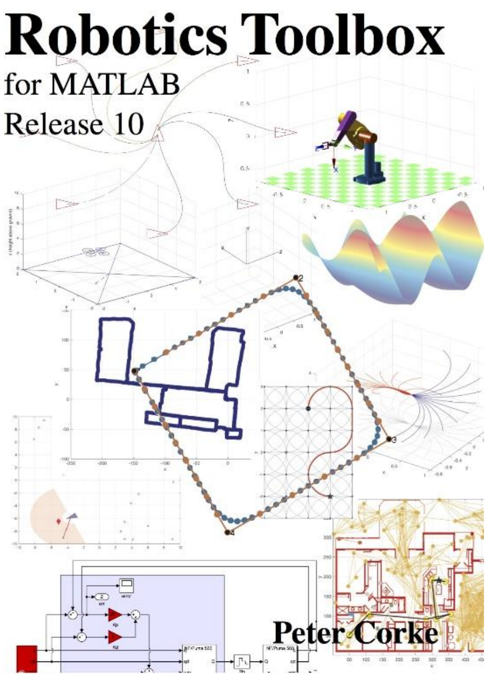
KIT-Fakultät für Informatik, Institut für Anthropomatik und Robotik (IAR)
Hochperformante Humanoide Technologien (H^2T)

Matlab für die nächsten Übungen

- Installationsanleitung für Studierende am KIT
  - https://www.scc.kit.edu/produkte/3841.php

- Robotics Toolbox (Peter Corke)
  - http://petercorke.com/wordpress/toolboxes/robotics-toolbox#Downloading_the_Toolbox
  - Die .mltbx Datei herunterladen
  - Aus dem Matlab-Filexplorer öffnen

- Selber ausprobieren: Übungsblatt 1 in Matlab lösen



Karlsruhe Institute of Technology

Robotik I: Einführung in die Robotik
Übung 1: Mathematische Grundlagen (Rest)

Fabian Paus, Tamim Asfour
Institut für Anthropomatik und Robotik

KIT-Fakultät für Informatik, Institut für Anthropomatik und Robotik (IAR)
Hochperformante Humanoide Technologien (H^2T)

Aufgabe 5: Quaternionen

Gegeben seien der Punkt $\boldsymbol{p} = (5, 1, 7)^T$, der Vektor $\boldsymbol{a} = (0, 0, 1)^T$ und der Winkel $\Phi = 90°$.

1. Stellen Sie $\boldsymbol{p}$ als Quaternion $\boldsymbol{v}$ dar.
2. Bestimmen Sie das Rotationsquaternion $\boldsymbol{q}$, das eine Rotation mit dem Winkel Φ um die Achse $\boldsymbol{a}$ beschreibt, sowie das zu $\boldsymbol{q}$ konjugierte Quaternion $\boldsymbol{q}^*$.
3. Transformieren Sie den Punkt $\boldsymbol{p}$ mit $\boldsymbol{q}$ und bestimmen Sie das Ergebnis $\boldsymbol{p}'$.
4. Gegeben seien die beiden Rotationsquaternionen $\boldsymbol{q_1} = (\cos\frac{\pi}{2}, \boldsymbol{a_1} \cdot \sin\frac{\pi}{2})$ und $\boldsymbol{q_2} = (\cos\frac{\pi}{2}, \boldsymbol{a_2} \cdot \sin\frac{\pi}{2})$ mit $\boldsymbol{a_1} = (1, 0, 0)^T$ und $\boldsymbol{a_2} = (0, 1, 0)^T$.
   Stellen Sie die direkte Formulierung der SLERP Interpolation zwischen $\boldsymbol{q_1}$ und $\boldsymbol{q_2}$ in Abhängigkeit des Parameters $t \in [0, 1]$ auf und geben Sie das Interpolationsergebnis für $t = \frac{1}{2}$ an.

Aufgabe 5.1

- Stellen Sie $\boldsymbol{p} = (5, 1, 7)^T$ als Quaternion $\boldsymbol{v}$ dar.

$\boldsymbol{v} =$

Aufgabe 5.1

- Stellen Sie $\boldsymbol{p} = (5, 1, 7)^T$ als Quaternion $\boldsymbol{v}$ dar.

$$\boldsymbol{v} = (0,\ \boldsymbol{p})$$

$$= (0,\ 5, 1, 7)$$

Aufgabe 5.2

- Bestimmen Sie das Rotationsquaternion $\boldsymbol{q}$, das eine Rotation mit dem Winkel $\Phi = 90°$um die Achse $\boldsymbol{a} = (0, 0, 1)^T$beschreibt, sowie das zu $\boldsymbol{q}$ konjugierte Quaternion $\boldsymbol{q}^*$.

$\boldsymbol{q} =$

Aufgabe 5.2

- Bestimmen Sie das Rotationsquaternion $\boldsymbol{q}$, das eine Rotation mit dem Winkel $\Phi = 90°$ um die Achse $\boldsymbol{a} = (0, 0, 1)^T$ beschreibt, sowie das zu $\boldsymbol{q}$ konjugierte Quaternion $\boldsymbol{q}^*$.

$\frac{\Phi}{2}$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{q} &= \left(\cos\frac{\Phi}{2},\ \boldsymbol{a} \cdot \sin\frac{\Phi}{2}\right) \\
&= (\cos 45°,\ 0,\ 0,\ \sin 45°) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} + k \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5.2

- Bestimmen Sie das Rotationsquaternion $\boldsymbol{q}$, das eine Rotation mit dem Winkel $\Phi = 90°$um die Achse $\boldsymbol{a} = (0, 0, 1)^T$beschreibt, sowie das zu $\boldsymbol{q}$ konjugierte Quaternion $\boldsymbol{q}^*$.

$$\boldsymbol{q} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\boldsymbol{q}^* =$$

Aufgabe 5.2

- Bestimmen Sie das Rotationsquaternion $\boldsymbol{q}$, das eine Rotation mit dem Winkel $\Phi = 90°$um die Achse $\boldsymbol{a} = (0, 0, 1)^T$beschreibt, sowie das zu $\boldsymbol{q}$ konjugierte Quaternion $\boldsymbol{q}^*$.

$$\boldsymbol{q} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{q}^* &= (s, -\boldsymbol{u}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} - k \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Aufgabe 5.3

- Transformieren Sie den Punkt $\boldsymbol{p} = (5, 1, 7)^T$ mit $\boldsymbol{q} = \frac{1}{\sqrt{2}} + k \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ und bestimmen Sie das Ergebnis $\boldsymbol{p}'$.

$\boldsymbol{v}' = q \cdot v \cdot q^*$

$v = (0, 5, 1, 7)$

Aufgabe 5.3

- Transformieren Sie den Punkt $\boldsymbol{p} = (5, 1, 7)^T$ mit $\boldsymbol{q} = \frac{1}{\sqrt{2}} + k \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ und bestimmen Sie das Ergebnis $\boldsymbol{p}'$.

$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{q}^*$ $\qquad$ $\boldsymbol{v} = (0,\ 5, 1, 7)$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + k \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot (5i + 1j + 7k) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - k \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(5i + 1j + 7k + 5ki + 1kj + 7k^2) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - k \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(5i + 1j + 7k + 5j + 1(-i) + 7(-1)) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - k \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Aufgabe 5.3

- Transformieren Sie den Punkt $\boldsymbol{p} = (5, 1, 7)^T$ mit $\boldsymbol{q} = \frac{1}{\sqrt{2}} + k \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ und bestimmen Sie das Ergebnis $\boldsymbol{p}'$.

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{q}^* \qquad\qquad \boldsymbol{v} = (0,\ 5, 1, 7)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (-7 + 4i + 6j + 7k) \cdot (1 - k)$$

Aufgabe 5.3

- Transformieren Sie den Punkt $\boldsymbol{p} = (5, 1, 7)^T$ mit $\boldsymbol{q} = \frac{1}{\sqrt{2}} + k \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ und bestimmen Sie das Ergebnis $\boldsymbol{p}'$.

$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{q}^*$ $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{v} = (0,\ 5, 1, 7)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (-7 + 4i + 6j + 7k) \cdot (1 - k)$$

$$= \frac{1}{2} (-7 + 4i + 6j + 7k + 7k - 4ik - 6jk - 7k^2)$$

$$= \frac{1}{2} \big(-7 + 4i + 6j + 7k + 7k - 4(-j) - 6(i) - 7(-1)\big)$$

Aufgabe 5.3

- Transformieren Sie den Punkt $\boldsymbol{p} = (5, 1, 7)^T$ mit $\boldsymbol{q} = \frac{1}{\sqrt{2}} + k \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ und bestimmen Sie das Ergebnis $\boldsymbol{p}'$.

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{q}^* \qquad \boldsymbol{v} = (0,\ 5, 1, 7)$$

$$= \frac{1}{2}(0 - 2i + 10j + 14k)$$

$$= 0 - 1 \cdot i + 5j + 7k = (0, \underline{-1, 5, 7})$$

$$= (0, p')$$

$$p' = (-1, 5, 7)$$

✓

Aufgabe 5.3

- Transformieren Sie den Punkt $\boldsymbol{p} = (5, 1, 7)^T$ mit $\boldsymbol{q} = \frac{1}{\sqrt{2}} + k \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ und bestimmen Sie das Ergebnis $\boldsymbol{p}'$.

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{q}^* \qquad \boldsymbol{v} = (0,\ 5, 1, 7)$$

$$= \frac{1}{2}(0 - 2i + 10j + 14k)$$

$$= 0 - i + 5j + 7k = (0,\ \mathbf{-1},\ \mathbf{5},\ \mathbf{7})$$

$$\boldsymbol{v}' = (0,\ \boldsymbol{p}')$$

➔ $\boldsymbol{p}' = (-1,\ 5,\ 7)$

Aufgabe 5.4

- Gegeben:
  $\boldsymbol{q}_1 = (\cos\frac{\pi}{2}, \boldsymbol{a}_1 \cdot \sin\frac{\pi}{2})$ mit $\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 0)^T$
  $\boldsymbol{q}_2 = (\cos\frac{\pi}{2}, \boldsymbol{a}_2 \cdot \sin\frac{\pi}{2})$ mit $\boldsymbol{a}_2 = (0, 1, 0)^T$

$\mathrm{Slerp}(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2,\ t) = ?$

Aufgabe 5.4

- Gegeben:
  $\boldsymbol{q}_1 = (\cos\frac{\pi}{2}, \boldsymbol{a}_1 \cdot \sin\frac{\pi}{2})$ mit $\boldsymbol{a}_1 = (1,0,0)^T$
  $\boldsymbol{q}_2 = (\cos\frac{\pi}{2}, \boldsymbol{a}_2 \cdot \sin\frac{\pi}{2})$ mit $\boldsymbol{a}_2 = (0,1,0)^T$

$q_1 = (0, 1, 0, 0)$
$q_2 = (0, 0, 1, 0)$

$\mathrm{Slerp}(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, t) = ?$

Winkel θ zwischen $\boldsymbol{q}_1$ und $\boldsymbol{q}_2$:

$$\cos\theta = \langle q_1, q_2 \rangle$$
$$= 0$$
$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

Aufgabe 5.4

- Gegeben:
  $\boldsymbol{q}_1 = (\cos\frac{\pi}{2}, \boldsymbol{a}_1 \cdot \sin\frac{\pi}{2})$ mit $\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 0)^T$
  $\boldsymbol{q}_2 = (\cos\frac{\pi}{2}, \boldsymbol{a}_2 \cdot \sin\frac{\pi}{2})$ mit $\boldsymbol{a}_2 = (0, 1, 0)^T$

$\mathrm{Slerp}(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \ t) = ?$

Winkel θ zwischen $\boldsymbol{q}_1$ und $\boldsymbol{q}_2$:

$$\cos\theta = \langle \boldsymbol{q}_1 | \boldsymbol{q}_2 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

Aufgabe 5.4

- Gegeben:
  $\boldsymbol{q}_1 = (\cos\frac{\pi}{2}, \boldsymbol{a}_1 \cdot \sin\frac{\pi}{2})$ mit $\boldsymbol{a}_1 = (1,0,0)^T$
  $\boldsymbol{q}_2 = (\cos\frac{\pi}{2}, \boldsymbol{a}_2 \cdot \sin\frac{\pi}{2})$ mit $\boldsymbol{a}_2 = (0,1,0)^T$
  $\theta = \frac{\pi}{2}$

$\mathrm{Slerp}(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2,\ t) =$

Aufgabe 5.4

- Gegeben:

  $\boldsymbol{q}_1 = (\cos\frac{\pi}{2}, \boldsymbol{a}_1 \cdot \sin\frac{\pi}{2})$ mit $\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 0)^T$

  $\boldsymbol{q}_2 = (\cos\frac{\pi}{2}, \boldsymbol{a}_2 \cdot \sin\frac{\pi}{2})$ mit $\boldsymbol{a}_2 = (0, 1, 0)^T$

  $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\mathrm{Slerp}(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2,\ t) = \frac{\sin(1-t)\theta}{\cancel{\sin\theta}} \cdot \boldsymbol{q}_1 + \frac{\sin t\theta}{\cancel{\sin\theta}} \cdot \boldsymbol{q}_2$$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$$= \sin\left((1-t)\frac{\pi}{2}\right) q_1 + \sin\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right) q_2$$

Aufgabe 5.4

- Gegeben:
  $\boldsymbol{q}_1 = (\cos\frac{\pi}{2}, \boldsymbol{a}_1 \cdot \sin\frac{\pi}{2})$ mit $\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 0)^T$
  $\boldsymbol{q}_2 = (\cos\frac{\pi}{2}, \boldsymbol{a}_2 \cdot \sin\frac{\pi}{2})$ mit $\boldsymbol{a}_2 = (0, 1, 0)^T$
  $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\mathrm{Slerp}(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2,\ t) = \frac{\sin(1-t)\theta}{\sin\theta} \cdot \boldsymbol{q}_1 + \frac{\sin t\theta}{\sin\theta} \cdot \boldsymbol{q}_2$$

$$= \sin\left((1-t)\frac{\pi}{2}\right) \cdot \boldsymbol{q}_1 + \sin\left(t\frac{\pi}{2}\right) \cdot \boldsymbol{q}_2 \qquad // \ \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

Aufgabe 5.4

- Gegeben:
  $\boldsymbol{q}_1 = (\cos\frac{\pi}{2}, \boldsymbol{a}_1 \cdot \sin\frac{\pi}{2})$ mit $\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 0)^T$
  $\boldsymbol{q}_2 = (\cos\frac{\pi}{2}, \boldsymbol{a}_2 \cdot \sin\frac{\pi}{2})$ mit $\boldsymbol{a}_2 = (0, 1, 0)^T$
  $t = 0.5$

$\underline{t = 0{,}5}$

$\text{Slerp}(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2,\ 0.5) = ?$

Aufgabe 5.4

- Gegeben:
  $\boldsymbol{q}_1 = (\cos\frac{\pi}{2}, \boldsymbol{a}_1 \cdot \sin\frac{\pi}{2})$ mit $\boldsymbol{a}_1 = (1,0,0)^T$
  $\boldsymbol{q}_2 = (\cos\frac{\pi}{2}, \boldsymbol{a}_2 \cdot \sin\frac{\pi}{2})$ mit $\boldsymbol{a}_2 = (0,1,0)^T$
  $t = 0.5$

$q_1 = i$
$q_2 = j$

$$\mathrm{Slerp}(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2,\ 0.5) = \sin\left(\underbrace{(1-t)}_{0.5}\frac{\pi}{2}\right)\cdot \boldsymbol{q}_1 + \sin\left(\underbrace{t}_{0.5}\frac{\pi}{2}\right)\cdot \boldsymbol{q}_2$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot \boldsymbol{q}_1 + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot \boldsymbol{q}_2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot \boldsymbol{q}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot \boldsymbol{q}_2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot i + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot j$$

Aufgabe 6: Quaternionen

Zeigen Sie dass der Raum der Einheitsquaternionen eine Untergruppe der Quaternionen $\mathbb{H}$ ist.

Hinweis: G ist genau dann eine Gruppe $(G, \boxed{\cdot})$ wenn gilt:

1. Abgeschlossen bzgl. $\cdot$: $\forall a, b \in G : a \cdot b \in G$
2. Assoziativität: $\forall a, b, c \in G : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
3. Neutrales Element: $\exists e \in G : \forall a \in G : e \cdot a = a \cdot e = a$
4. Inverses Element: $\forall a \in G : \exists a^{-1} : a \cdot a^{-1} = e$

Aufgabe 6.1: Abgeschlossenheit (Tricky)

1. Abgeschlossen bzgl. $\cdot$: $\forall a, b \in G : a \cdot b \in G$

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in S^3 : \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \in S^3$$

$$\|a \cdot b\|^2 \overset{?}{=} 1$$

$$\|q\|^2 = q \cdot q^*$$

Involutiver Antiautomorphismus

$$(a \cdot b)^* = b^* \cdot a^*$$

$$\|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}\|^2 = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b)^*$$

$$= (a \cdot b) \cdot (b^* \cdot a^*)$$

$$= a \cdot (b \cdot b^*) \cdot a^*$$

$$= a \cdot \|b\|^2 a^* = a \cdot 1 \cdot a^* = \|a\|^2$$

$$= 1 \quad \square$$

Aufgabe 6.1: Abgeschlossenheit (Tricky)

1. Abgeschlossen bzgl. $\cdot$: $\forall a, b \in G : a \cdot b \in G$

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in S^3 : \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \in S^3$$

$$\|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}\|^2 = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^*$$

$$= (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{b}^* \cdot \boldsymbol{a}^*)$$ // Involutiver Antiautomorphismus

$$= \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}^*) \cdot \boldsymbol{a}^*$$ // Assozitivität

$$= \boldsymbol{a} \cdot \|\boldsymbol{b}\|^2 \cdot \boldsymbol{a}^* = \boldsymbol{a} \cdot 1 \cdot \boldsymbol{a}^* = \|\boldsymbol{a}\| = 1$$

Aufgabe 6.1: Abgeschlossenheit

1. Abgeschlossen bzgl. $\cdot$: $\forall a, b \in G : a \cdot b \in G$

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in S^3 : \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \in S^3$$

$$\|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}\|^2 =$$

Aufgabe 6.1: Abgeschlossenheit

1. Abgeschlossen bzgl. $\cdot$: $\forall a, b \in G : a \cdot b \in G$

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in S^3 : \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \in S^3$$

$$\|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}\|^2 = \|(a_0, a_1, a_2, a_3) \cdot (b_0, b_1, b_2, b_3)\|^2$$

Aufgabe 6.1: Abgeschlossenheit

1. Abgeschlossen bzgl. $\cdot$: $\forall a, b \in G : a \cdot b \in G$

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in S^3 : \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \in S^3$$

$$\|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}\|^2 = \|(a_0, a_1, a_2, a_3) \cdot (b_0, b_1, b_2, b_3)\|^2$$

$$\begin{aligned} &= a_3^2 b_3^2 + a_2^2 b_3^2 + a_1^2 b_3^2 + a_0^2 b_3^2 \\ &+ a_3^2 b_2^2 + a_2^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + a_0^2 b_2^2 \\ &+ a_3^2 b_1^2 + a_2^2 b_1^2 + a_1^2 b_1^2 + a_0^2 b_1^2 \\ &+ a_3^2 b_0^2 + a_2^2 b_0^2 + a_1^2 b_0^2 + a_0^2 b_0^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 6.1: Abgeschlossenheit

1. Abgeschlossen bzgl. $\cdot$: $\forall a, b \in G : a \cdot b \in G$

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in S^3 : \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \in S^3$$

$$\|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}\|^2 = \|(a_0, a_1, a_2, a_3) \cdot (b_0, b_1, b_2, b_3)\|^2$$

$$\begin{aligned} &= a_3^2 b_3^2 + a_2^2 b_3^2 + a_1^2 b_3^2 + a_0^2 b_3^2 \\ &+ a_3^2 b_2^2 + a_2^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + a_0^2 b_2^2 \\ &+ a_3^2 b_1^2 + a_2^2 b_1^2 + a_1^2 b_1^2 + a_0^2 b_1^2 \\ &+ a_3^2 b_0^2 + a_2^2 b_0^2 + a_1^2 b_0^2 + a_0^2 b_0^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 6.1: Abgeschlossenheit

1. Abgeschlossen bzgl. $\cdot$: $\forall a, b \in G : a \cdot b \in G$

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in S^3 : \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \in S^3$$

$$\|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}\|^2 = \|(a_0, a_1, a_2, a_3) \cdot (b_0, b_1, b_2, b_3)\|^2$$

$$\begin{aligned} &= b_3^2 \cdot \left[(a_3^2 + a_2^2 + a_1^2 + a_0^2)\right] \qquad \|a\|^2 \\ &+ b_2^2 \cdot (a_3^2 + a_2^2 + a_1^2 + a_0^2) \\ &+ b_1^2 \cdot (a_3^2 + a_2^2 + a_1^2 + a_0^2) \\ &+ b_0^2 \cdot (a_3^2 + a_2^2 + a_1^2 + a_0^2) \end{aligned}$$

Aufgabe 6.1: Abgeschlossenheit

1. Abgeschlossen bzgl. $\cdot$: $\forall a, b \in G : a \cdot b \in G$

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in S^3 : \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \in S^3$$

$$\|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}\|^2 = \|(a_0, a_1, a_2, a_3) \cdot (b_0, b_1, b_2, b_3)\|^2$$

$$= b_3^2 \cdot \underline{\|\boldsymbol{a}\|^2} + b_2^2 \cdot \underline{\|\boldsymbol{a}\|^2} + b_1^2 \cdot \underline{\|\boldsymbol{a}\|^2} + b_0^2 \cdot \underline{\|\boldsymbol{a}\|^2}$$

Aufgabe 6.1: Abgeschlossenheit

1. Abgeschlossen bzgl. $\cdot$: $\forall a, b \in G : a \cdot b \in G$

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in S^3 : \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \in S^3$$

$$\|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}\|^2 = \|(a_0, a_1, a_2, a_3) \cdot (b_0, b_1, b_2, b_3)\|^2$$

$$= b_3^2 \cdot \|\boldsymbol{a}\|^2 + b_2^2 \cdot \|\boldsymbol{a}\|^2 + b_1^2 \cdot \|\boldsymbol{a}\|^2 + b_0^2 \cdot \|\boldsymbol{a}\|^2$$

$$= (b_3^2 + b_2^2 + b_1^2 + b_0^2) \cdot \|\boldsymbol{a}\|^2$$

$\|b\|^2$

Aufgabe 6.1: Abgeschlossenheit

1. Abgeschlossen bzgl. $\cdot$: $\forall a, b \in G : a \cdot b \in G$

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in S^3 : \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \in S^3$$

$$\|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}\|^2 = \|(a_0, a_1, a_2, a_3) \cdot (b_0, b_1, b_2, b_3)\|^2$$

$$= b_3^2 \cdot \|\boldsymbol{a}\|^2 + b_2^2 \cdot \|\boldsymbol{a}\|^2 + b_1^2 \cdot \|\boldsymbol{a}\|^2 + b_0^2 \cdot \|\boldsymbol{a}\|^2$$

$$= (b_3^2 + b_2^2 + b_1^2 + b_0^2) \cdot \|\boldsymbol{a}\|^2$$

$$= \|\boldsymbol{b}\|^2 \cdot \|\boldsymbol{a}\|^2 \stackrel{!}{=} 1 \cdot 1 = 1$$

$\square$

Aufgabe 6.1: Abgeschlossenheit

1. Abgeschlossen bzgl. $\cdot$: $\forall a, b \in G : a \cdot b \in G$

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in S^3 : \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \in S^3$$

$$\|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}\|^2 = \|(a_0, a_1, a_2, a_3) \cdot (b_0, b_1, b_2, b_3)\|^2$$

$$= b_3^2 \cdot \|\boldsymbol{a}\| + b_2^2 \cdot \|\boldsymbol{a}\| + b_1^2 \cdot \|\boldsymbol{a}\| + b_0^2 \cdot \|\boldsymbol{a}\|$$

$$= (b_3^2 + b_2^2 + b_1^2 + b_0^2) \cdot \|\boldsymbol{a}\|$$

$$= \|\boldsymbol{b}\|^2 \cdot \|\boldsymbol{a}\|^2 = 1 \cdot 1 = 1$$

Aufgabe 6.1: Abgeschlossenheit

1. Abgeschlossen bzgl. $\cdot$: $\forall a, b \in G : a \cdot b \in G$

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in S^3 : \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \in S^3$$

$$\|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}\|^2 = \|(a_0, a_1, a_2, a_3) \cdot (b_0, b_1, b_2, b_3)\|^2$$

$$= b_3^2 \cdot \|\boldsymbol{a}\| + b_2^2 \cdot \|\boldsymbol{a}\| + b_1^2 \cdot \|\boldsymbol{a}\| + b_0^2 \cdot \|\boldsymbol{a}\|$$

$$= (b_3^2 + b_2^2 + b_1^2 + b_0^2) \cdot \|\boldsymbol{a}\|$$

$$= \|\boldsymbol{b}\|^2 \cdot \|\boldsymbol{a}\|^2 = 1 \cdot 1 = 1$$

q. e. d.

Aufgabe 6.2 & 6.3: Assoziativität und Neutrales Element

2. Assoziativität: $\forall a, b, c \in G : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

$S^3 \subset \mathbb{H}$: assoziativ ✓

3. Neutrales Element: $\exists e \in G : \forall a \in G : e \cdot a = a \cdot e = a$

$e = (1,0,0,0)$

$1 \cdot a = a$

$a \cdot 1 = a$

$\|1\| = 1$ ✓

Aufgabe 6.2 & 6.3: Assoziativität und Neutrales Element

2. Assoziativität: $\forall a, b, c \in G : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Eineheitsquaternionen sind Untermenge der Quaternionen.
Multiplikation von Quaternionen ist assoziativ.

3. Neutrales Element: $\exists e \in G : \forall a \in G : e \cdot a = a \cdot e = a$

Das neutrale Element ist $\boldsymbol{e} = (1, 0, 0, 0)$.

Aufgabe 6.4: Inverses Element

4. Inverses Element: $\forall a \in G : \exists a^{-1} : a \cdot a^{-1} = e$

$$\boldsymbol{q} \in S^3 \Rightarrow \boldsymbol{q}^{-1} \in S^3$$

$$\|q^{-1}\|^2 = \left\| \frac{q^*}{\|q\|} \right\| \qquad \|q\| = 1$$

$$= \|q^*\| \qquad q^* = (s, -\underline{u})$$

$$= 1$$

$\square$

Aufgabe 6.4: Inverses Element

4. Inverses Element: $\forall a \in G : \exists a^{-1} : a \cdot a^{-1} = e$

$$\boldsymbol{q} \in S^3 \Rightarrow \boldsymbol{q}^{-1} \in S^3$$

$$\|\boldsymbol{q}^{-1}\|^2 = \left\|\frac{\boldsymbol{q}^*}{\|\boldsymbol{q}\|}\right\|^2$$

$$= \left\|\frac{\boldsymbol{q}^*}{1}\right\|^2$$

$$= 1$$

Aufgabe 6.1: Abgeschlossenheit

1. Abgeschlossen bzgl. $\cdot$: $\forall a, b \in G : a \cdot b \in G$ ☑

2. Assoziativität: $\forall a, b, c \in G : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ☑

3. Neutrales Element: $\exists e \in G : \forall a \in G : e \cdot a = a \cdot e = a$ ☑

4. Inverses Element: $\forall a \in G : \exists a^{-1} : a \cdot a^{-1} = e$ ☑

Karlsruhe Institute of Technology

Robotik I: Einführung in die Robotik
Übung 2: Kinematik

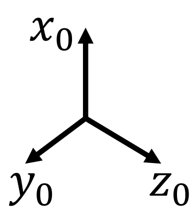
Fabian Paus, Tamim Asfour
Institut für Anthropomatik und Robotik

KIT-Fakultät für Informatik, Institut für Anthropomatik und Robotik (IAR)
Hochperformante Humanoide Technologien (H^2T)

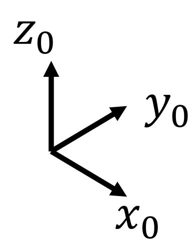
Aufgabe 1: DH-Transformation

- **Gegeben:**
  Rechtshändiges Koordinatensystem
- **Gesucht:**
  Transformiertes Koordinatensystem nach Anwendung der DH-Parameter

1. DH-Parameter: $\theta_1 = 0°, d_1 = 60\text{ mm}, a_1 = 0\text{ mm}, \alpha_1 = 180°$



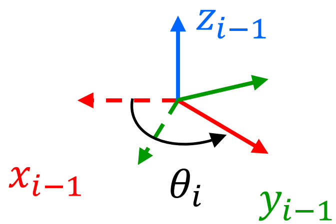
2. DH-Parameter: $\theta_1 = 90°, d_1 = -30\text{ mm}, a_1 = 60\text{ mm}, \alpha_1 = -90°$



DH-Transformationsmatrizen

Transformation OKS_{i-1} zu OKS_i

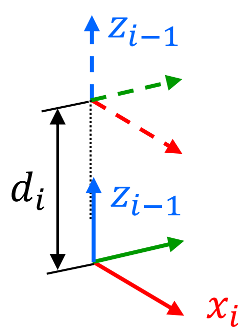
1. Eine **Rotation θ_i** um die **z_{i-1}-Achse**, damit die x_{i-1}-Achse parallel zur x_i-Achse liegt.



alte z-Achse

$$R_{z_{i-1}}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Eine **Translation d_i** entlang der **z_{i-1}-Achse** zu dem Punkt, wo sich z_{i-1} und x_i schneiden.



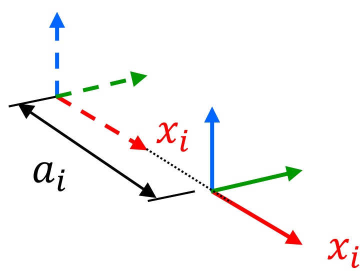
$$T_{z_{i-1}}(d_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

DH-Transformationsmatrizen II

Transformation OKS_{i-1} zu OKS_i

3. Eine **Translation** a_i entlang der x_i**-Achse**, um die Ursprünge der Koordinatensysteme in Deckung zu bringen.

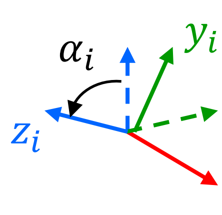
$$T_{x_i}(a_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



neue X-Achse

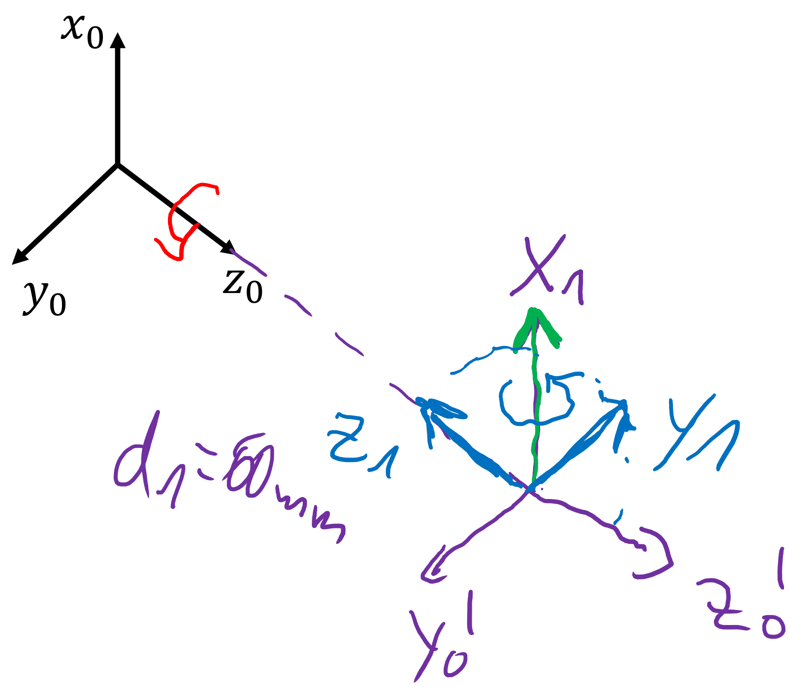
4. Eine **Rotation** α_i um die x_i**-Achse**, um die z_{i-1}-Achse in die z_i -Achse zu überführen.

$$R_{x_i}(\alpha_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & 0 \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



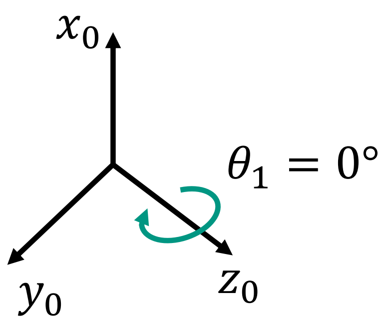
Aufgabe 1.1: DH-Transformation

- DH-Parameter: $\theta_1 = 0°, d_1 = 60 \text{ mm}, a_1 = 0 \text{ mm}, \alpha_1 = 180°$



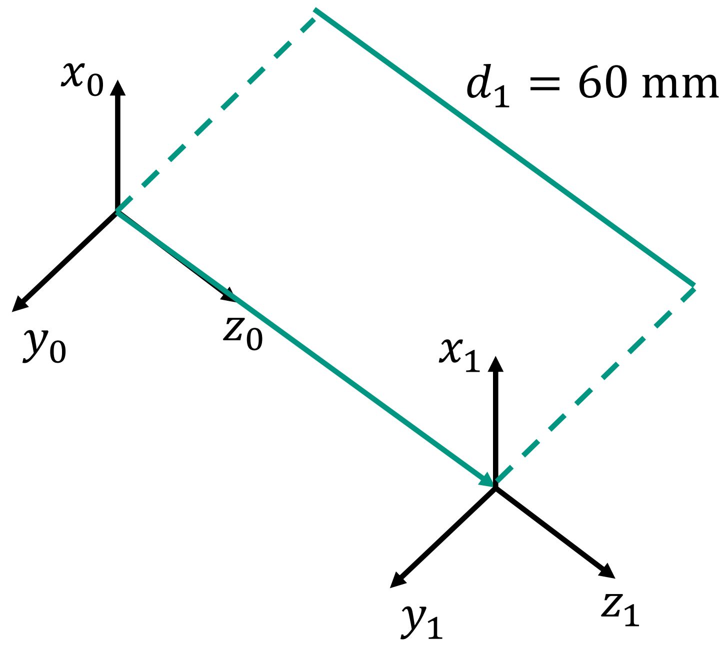
Aufgabe 1.1: DH-Transformation

- DH-Parameter: $\boldsymbol{\theta_1} = \mathbf{0}°, d_1 = 60\text{ mm}, a_1 = 0\text{ mm}, \alpha_1 = 180°$
  Rotation um z_0-Achse mit $\boldsymbol{\theta_1} = \mathbf{0}°$:



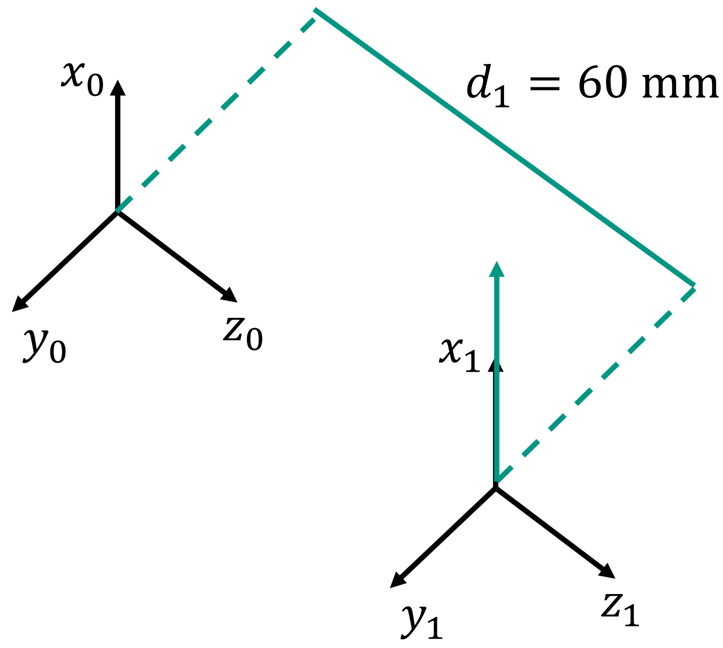
Aufgabe 1.1: DH-Transformation

- DH-Parameter: $\theta_1 = 0°, \boldsymbol{d_1} = \mathbf{60\ mm}, a_1 = 0\ \text{mm}, \alpha_1 = 180°$
  Translation entlang z_0-Achse mit $d_1 = 60\ \text{mm}$:



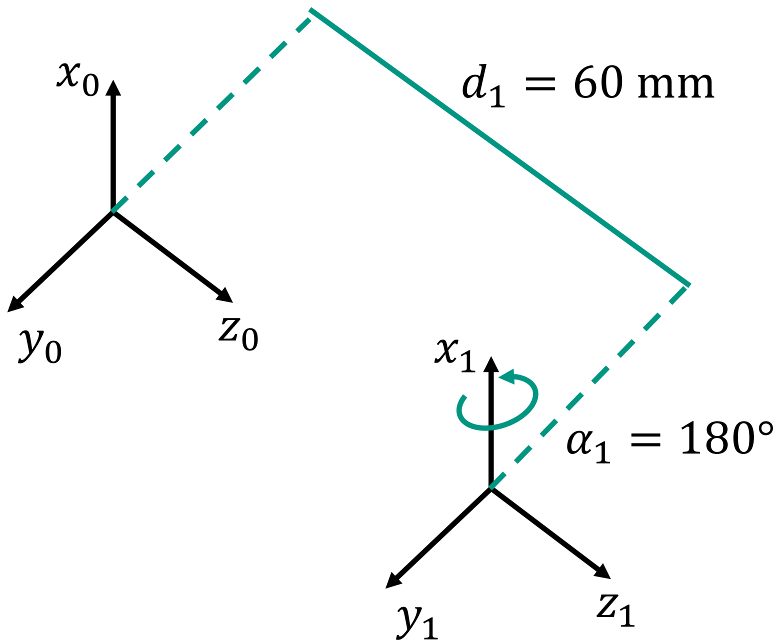
Aufgabe 1.1: DH-Transformation

- DH-Parameter: $\theta_1 = 0°, d_1 = 60\ mm, \boldsymbol{a_1} = \mathbf{0\ mm}, \alpha_1 = 180°$
  Translation entlang x_1-Achse mit $a_1 = 0$ mm:



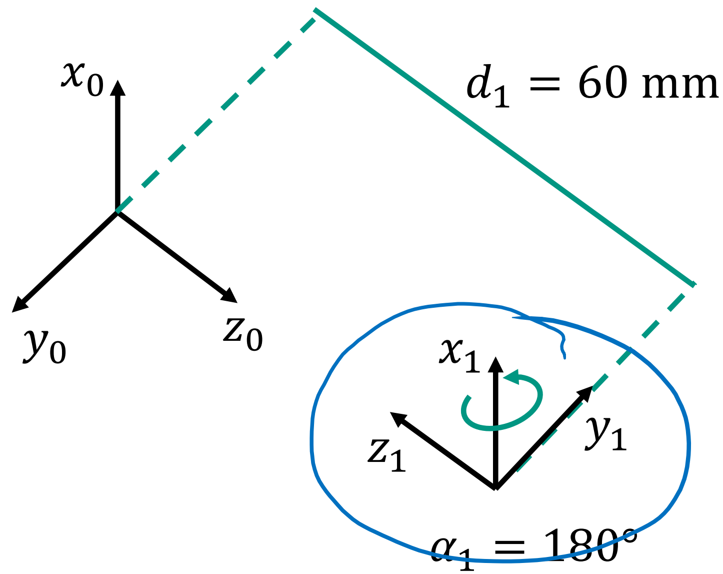
Aufgabe 1.1: DH-Transformation

- DH-Parameter: $\theta_1 = 0°, d_1 = 60\ mm, a_1 = 0\ mm, \boldsymbol{\alpha_1} = \mathbf{180°}$
  Rotation um x_1-Achse mit $\alpha_1 = 180°$:



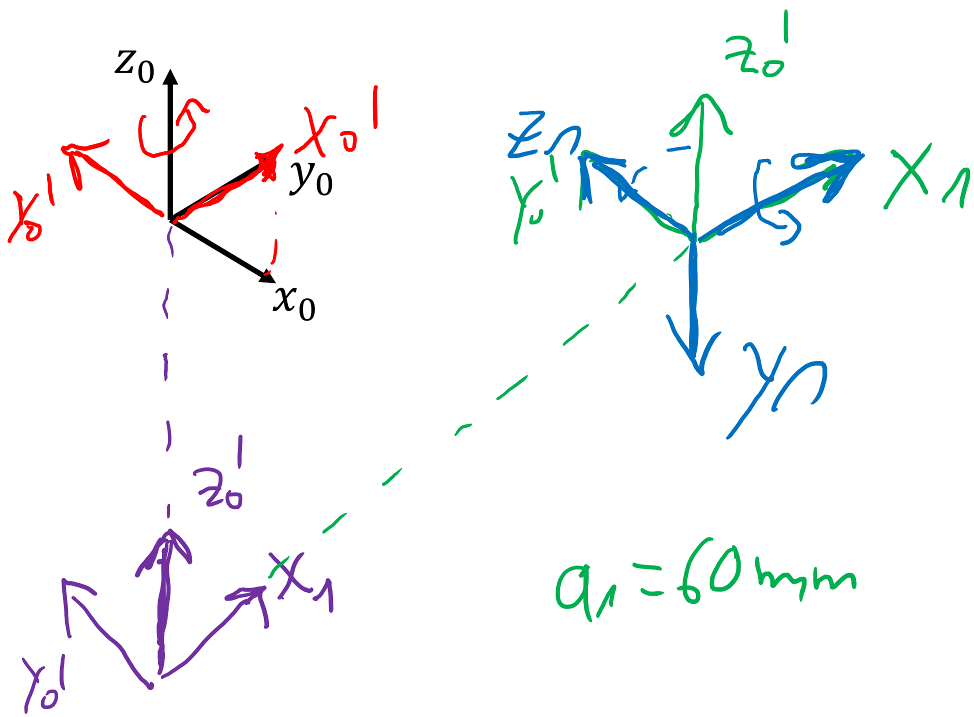
Aufgabe 1.1: DH-Transformation

- DH-Parameter: $\theta_1 = 0°, d_1 = 60\ mm, a_1 = 0\ mm, \boldsymbol{\alpha_1} = \mathbf{180°}$
  Rotation um x_1-Achse mit $\alpha_1 = 180°$:



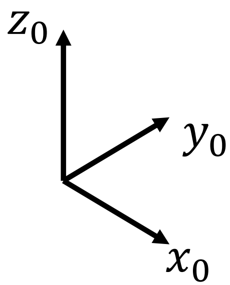
Aufgabe 1.2 : DH-Transformation

- DH-Parameter: $\theta_1 = 90°, d_1 = -30\text{ mm}, a_1 = 60\text{ mm}, \alpha_1 = -90°$



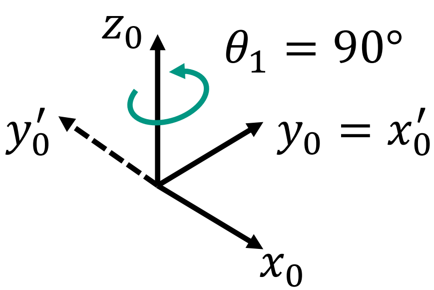
Aufgabe 1.2 : DH-Transformation

- DH-Parameter: $\boldsymbol{\theta_1} = \mathbf{90}°, d_1 = -30\ \mathrm{mm}, a_1 = 60\ \mathrm{mm}, \alpha_1 = -90°$
  Rotation um z_0-Achse mit $\theta_1 = 90°$:



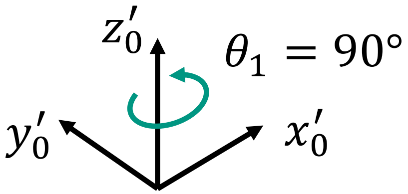
Aufgabe 1.2 : DH-Transformation

- DH-Parameter: $\boldsymbol{\theta_1} = \mathbf{90}°, d_1 = -30\text{ mm}, a_1 = 60\text{ mm}, \alpha_1 = -90°$
  Rotation um z_0-Achse mit $\theta_1 = 90°$:



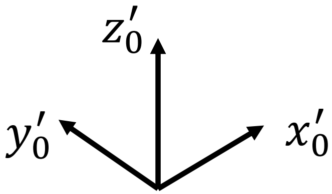
Aufgabe 1.2 : DH-Transformation

- DH-Parameter: $\boldsymbol{\theta_1} = \mathbf{90}°, d_1 = -30\text{ mm}, a_1 = 60\text{ mm}, \alpha_1 = -90°$
  Rotation um z_0-Achse mit $\theta_1 = 90°$:



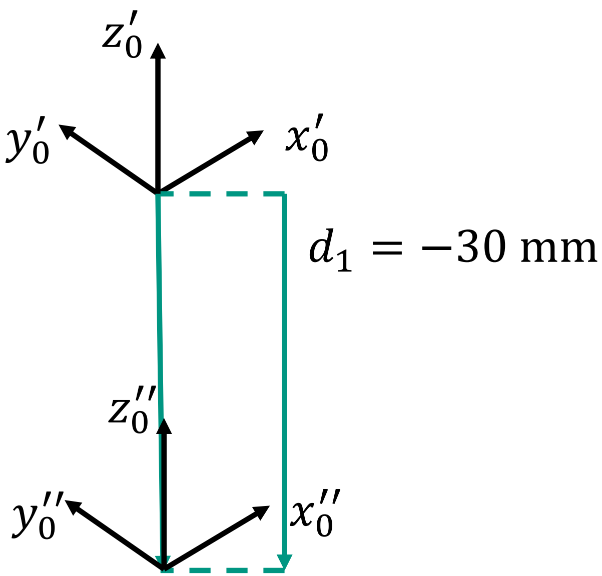
Aufgabe 1.2 : DH-Transformation

- DH-Parameter: $\theta_1 = 90°, \boldsymbol{d_1 = -30\ \mathrm{mm}}, a_1 = 60\ \mathrm{mm}, \alpha_1 = -90°$
  Translation entlang z_0-Achse mit $d_1 = -30\ mm$:



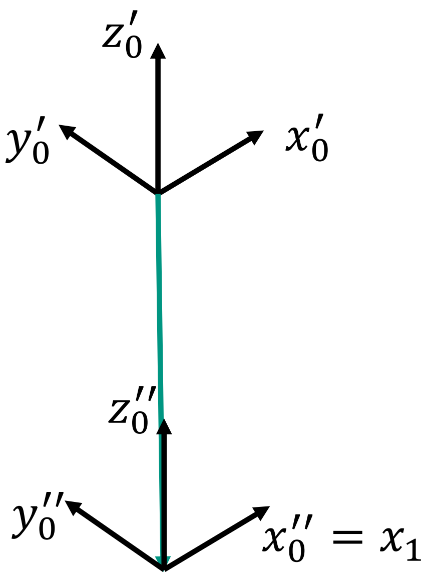
Aufgabe 1.2 : DH-Transformation

- DH-Parameter: $\theta_1 = 90°, \boldsymbol{d_1 = -30\ \mathrm{mm}}, a_1 = 60\ \mathrm{mm}, \alpha_1 = -90°$
  Translation entlang z_0-Achse mit $d_1 = -30\ mm$:



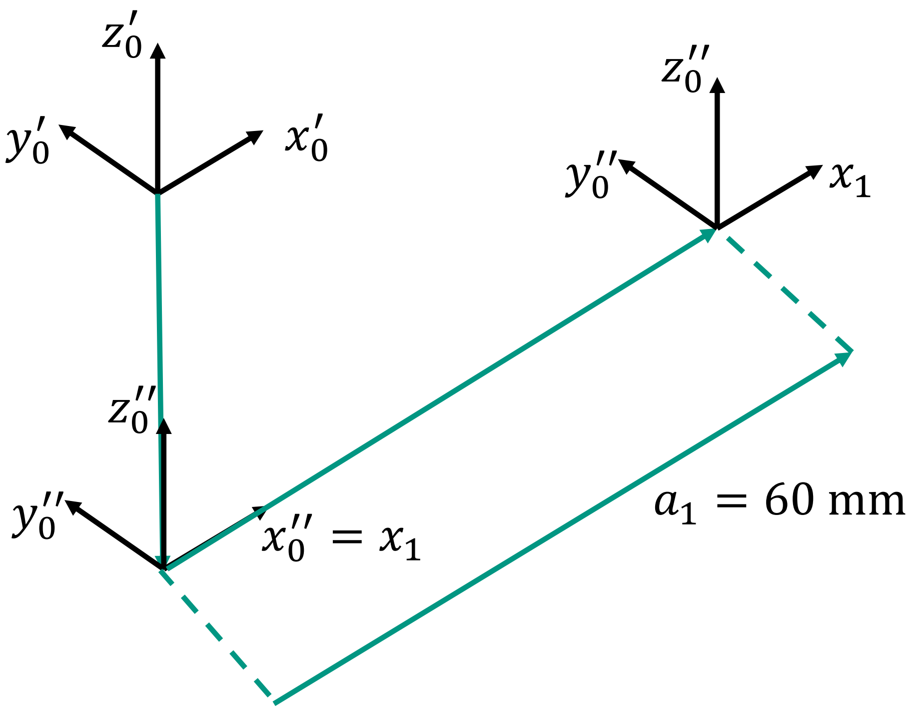
Aufgabe 1.2 : DH-Transformation

- DH-Parameter: $\theta_1 = 90°, d_1 = -30\ mm, \boldsymbol{a_1} = \mathbf{60\ mm}, \alpha_1 = -90°$
  Translation entlang x_1-Achse mit $a_1 = 60\ \mathrm{mm}$:



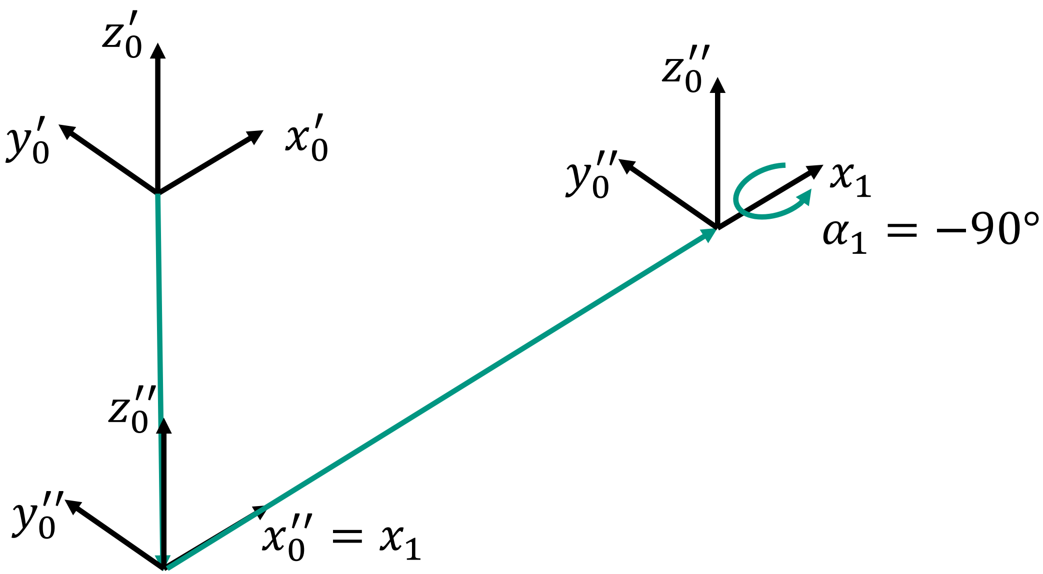
Aufgabe 1.2 : DH-Transformation

- DH-Parameter: $\theta_1 = 90°, d_1 = -30\ mm, \boldsymbol{a_1} = \mathbf{60\ mm}, \alpha_1 = -90°$
  Translation entlang x_1-Achse mit $a_1 = 60$ mm:



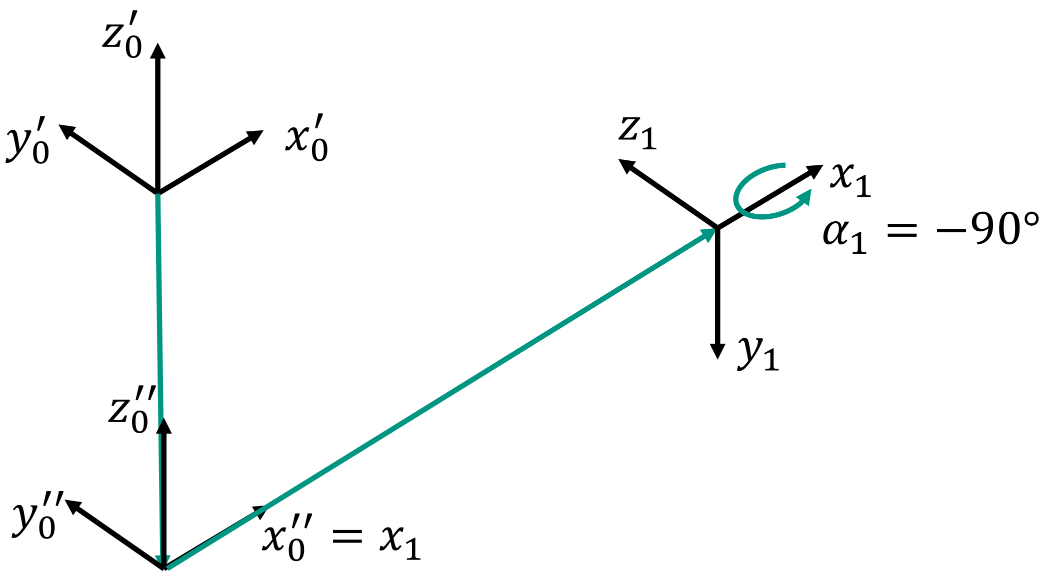
Aufgabe 1.2 : DH-Transformation

- DH-Parameter: $\theta_1 = 90°, d_1 = -30\ mm, a_1 = 60\ mm, \boldsymbol{\alpha_1} = \mathbf{-90°}$
  Rotation um x_1-Achse mit $\alpha_1 = -90°$:



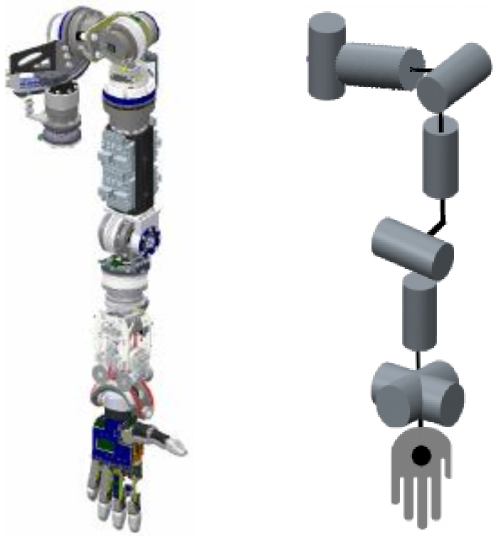
Aufgabe 1.2 : DH-Transformation

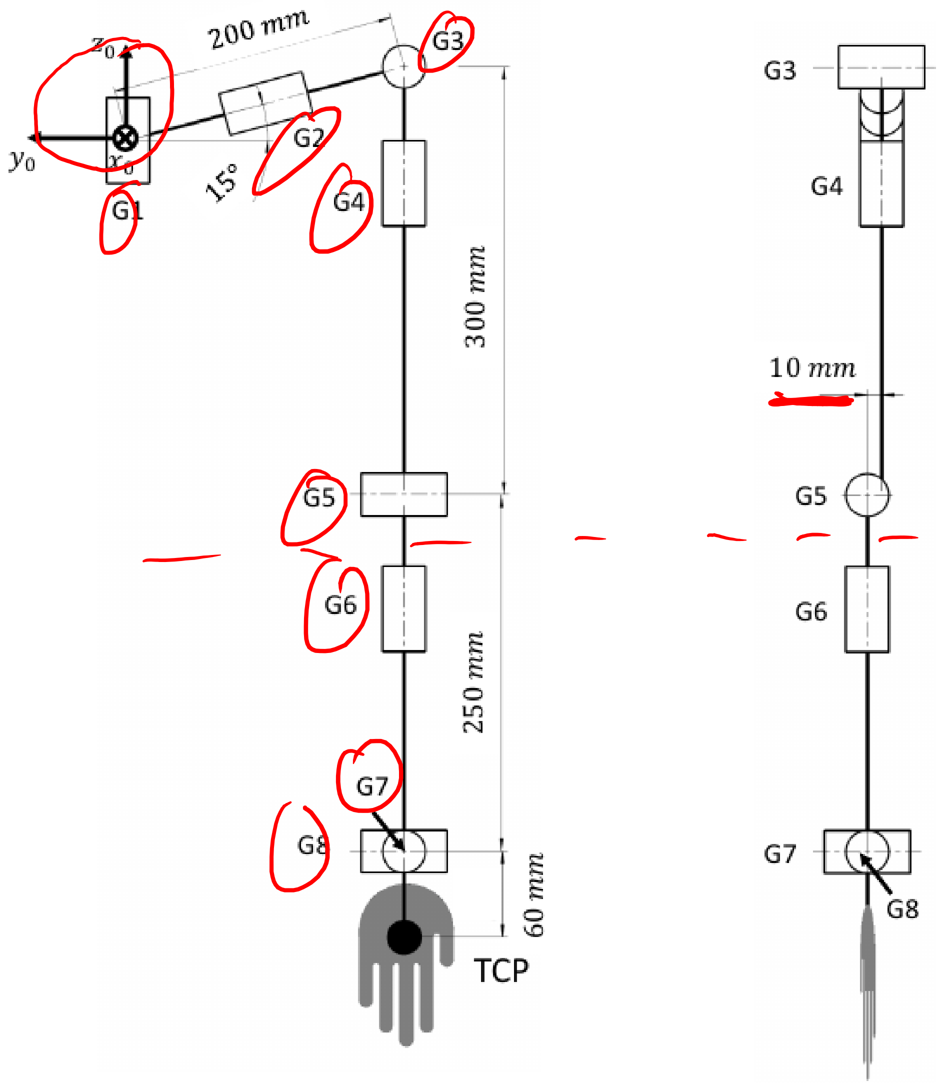
- DH-Parameter: $\theta_1 = 90°, d_1 = -30\ mm, a_1 = 60\ mm, \boldsymbol{\alpha_1} = \mathbf{-90}°$
  Rotation um x_1-Achse mit $\alpha_1 = -90°$:



Aufgabe 2: DH-Parameter ARMAR-4

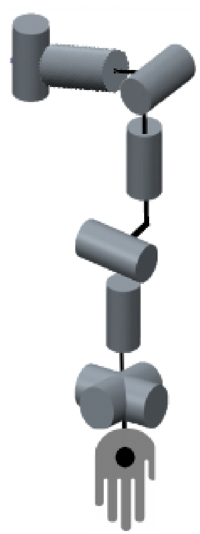
- **Gegeben:**
  Schematische Darstellung der linken Armkinematik von ARMAR-4
- **Gesucht:**
  DH-Parameter der Gelenke G1-G8 ausgehend vom Basiskoordinaten-system BKS

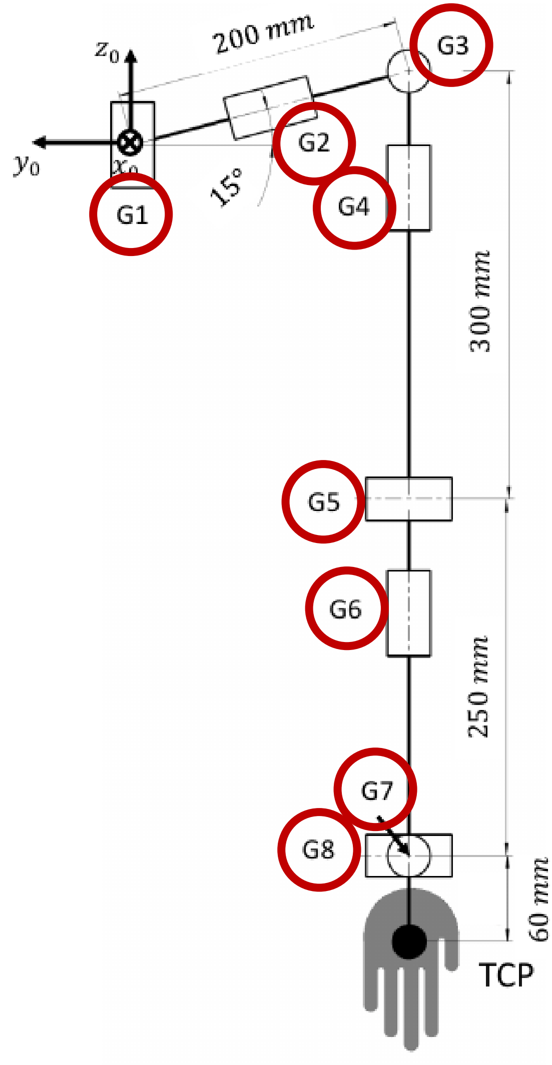


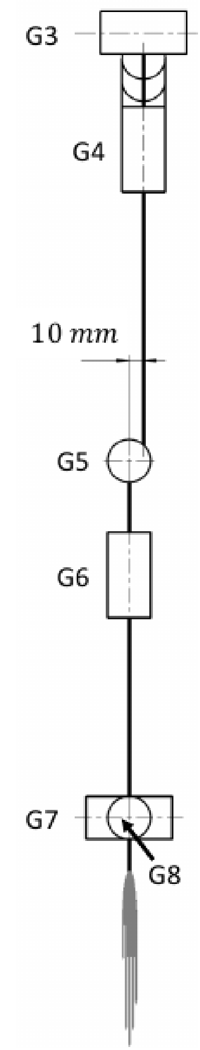


Aufgabe 2: DH-Parameter ARMAR-4

- **Gegeben:**
  Schematische Darstellung der linken Armkinematik von ARMAR-4
- **Gesucht:**
  DH-Parameter der Gelenke **G1-G8** ausgehend vom Basiskoordinatensystem BKS

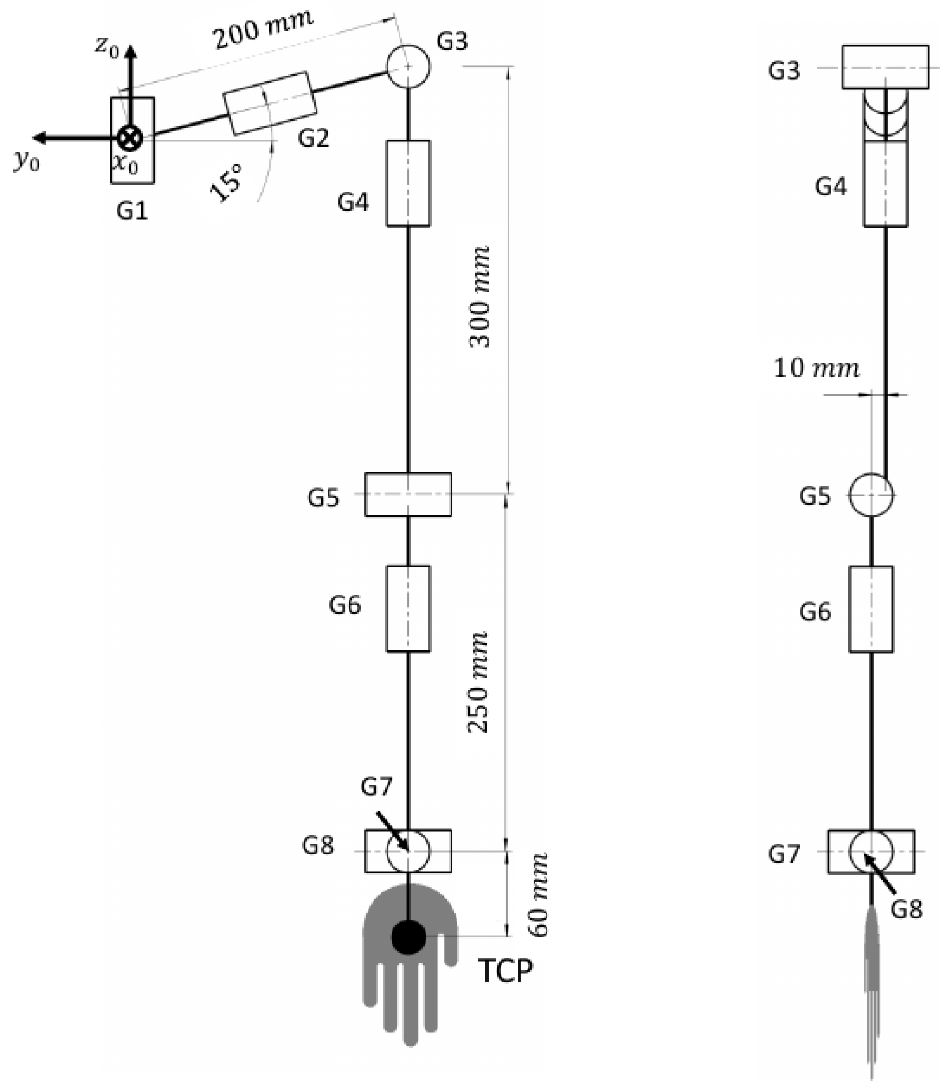






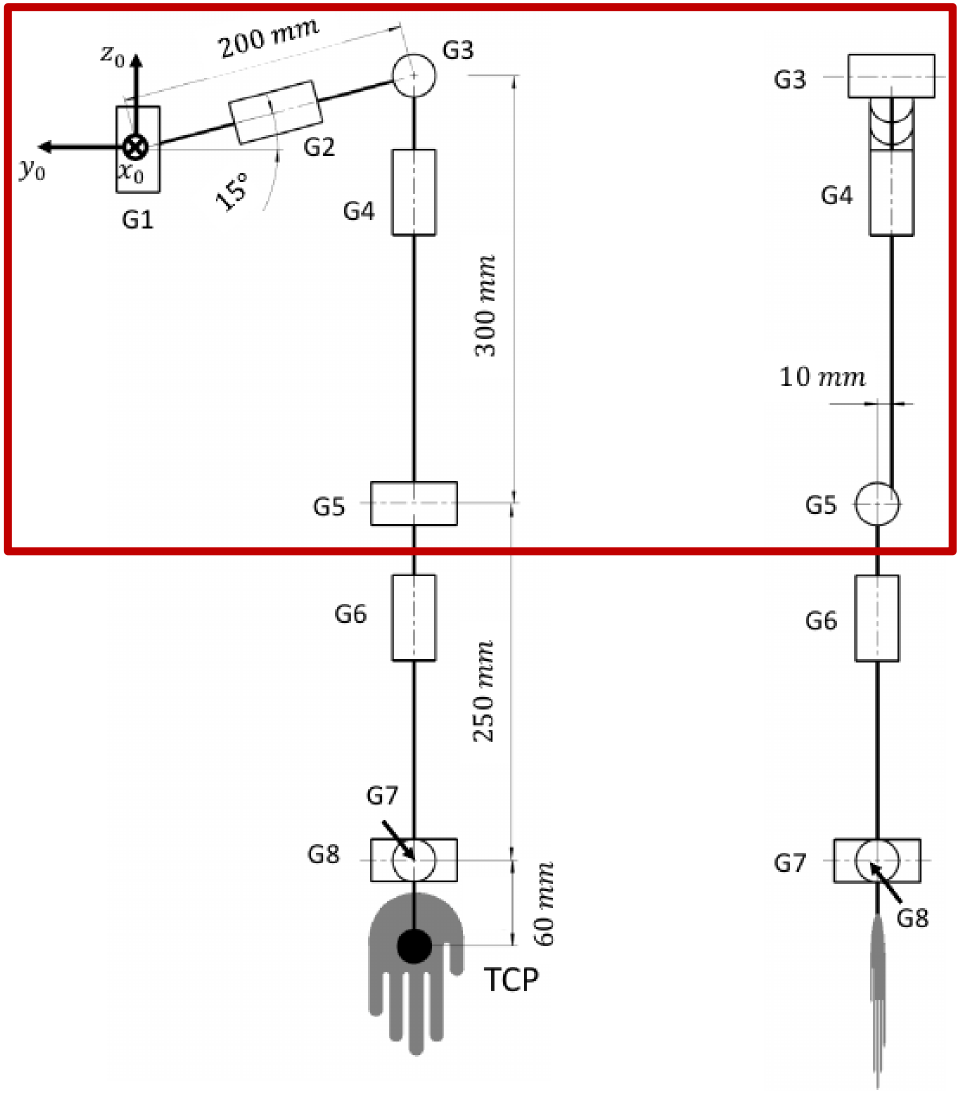
Aufgabe 2: DH-Parameter ARMAR-4

	θ [°]	d [mm]	a [mm]	α [°]
G1				
G2				
G3				
G4				
G5				
G6				
G7				
G8				



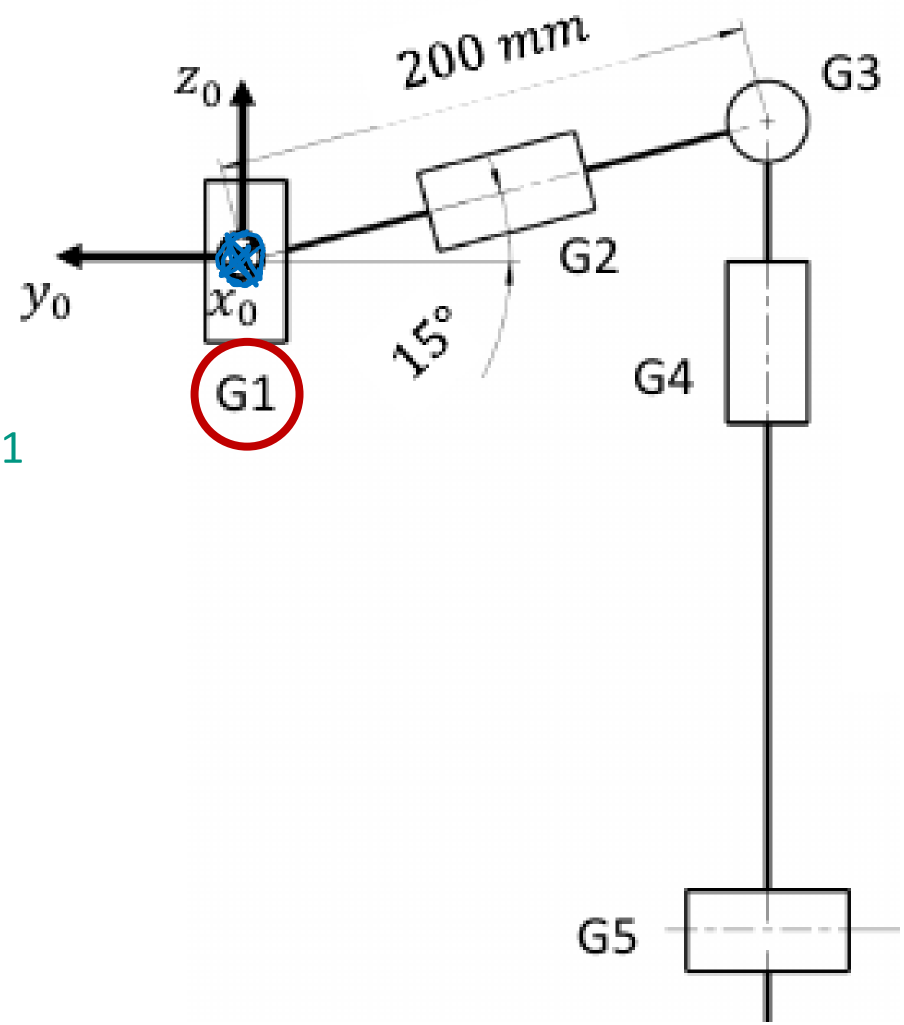
Aufgabe 2: DH-Parameter ARMAR-4

	θ [°]	d [mm]	a [mm]	α [°]
G1				
G2				
G3				
G4				
G5				
G6				
G7				
G8				

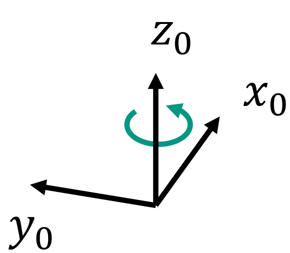


Aufgabe 2: DH-Parameter ARMAR-4

	$\boldsymbol{\theta}$ [°]	$\boldsymbol{d}$ [$\boldsymbol{mm}$]	$\boldsymbol{a}$ [$\boldsymbol{mm}$]	$\boldsymbol{\alpha}$ [°]
G1	$\boxed{\boldsymbol{\theta_1}}$			



- z_0-Achse des BKS ist Rotationsachse von G1

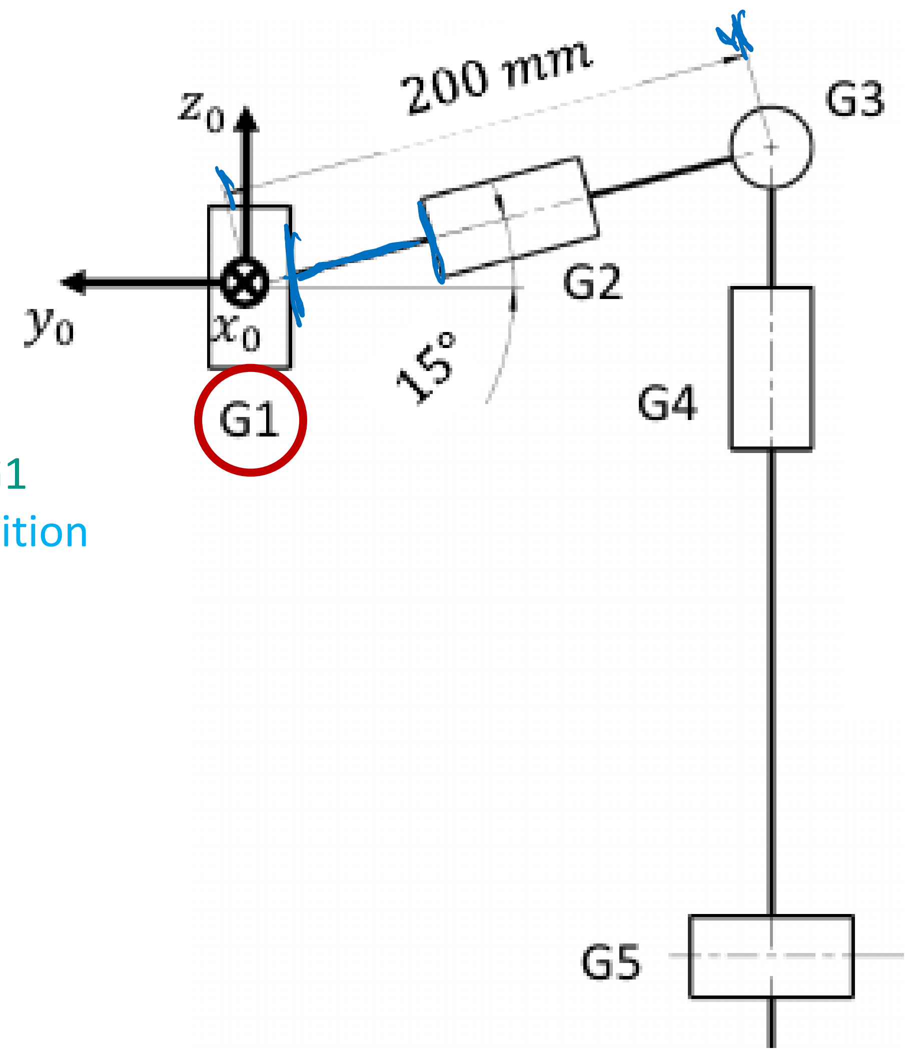


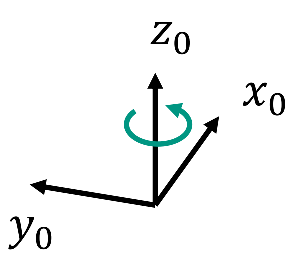
~~BKS~~

Aufgabe 2: DH-Parameter ARMAR-4

	θ [°]	d [mm]	a [mm]	α [°]
G1	$\theta_1 + 0$	0	0	

- z_0-Achse des BKS ist Rotationsachse von G1
- G1 und G2 befinden sich an derselben Position

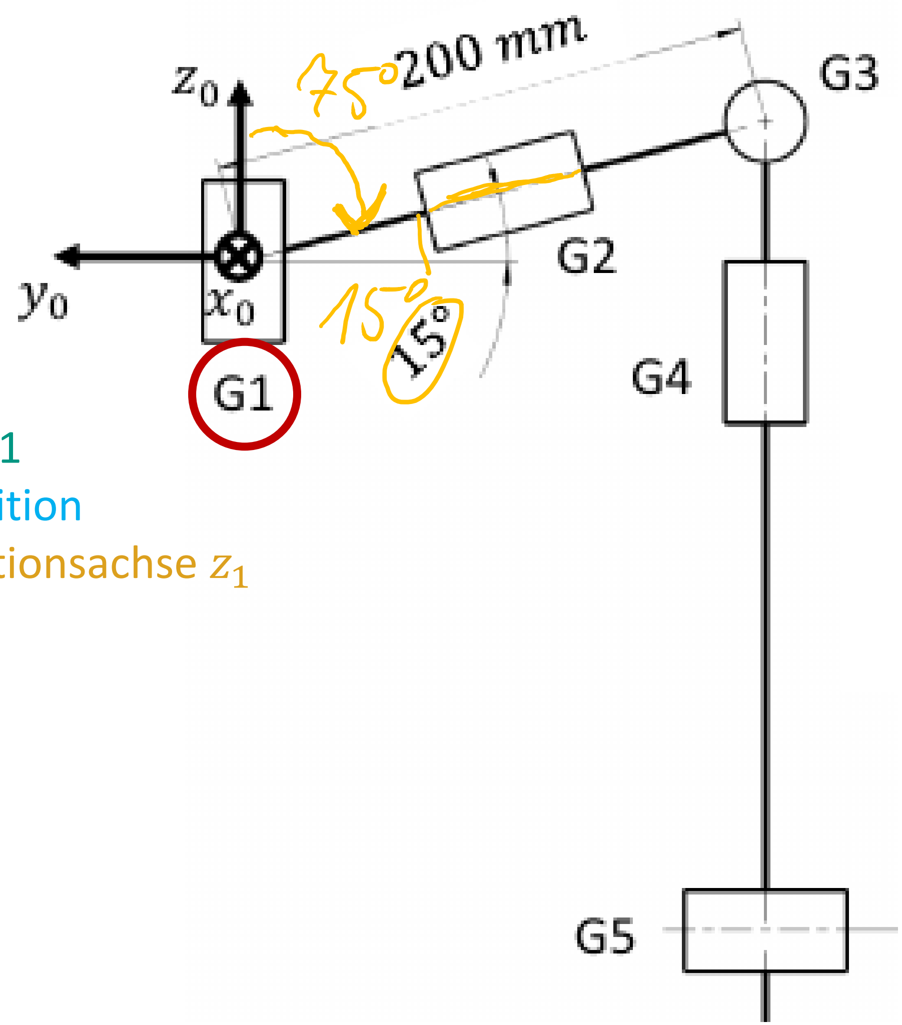




BKS

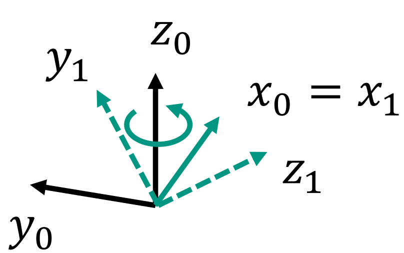
Aufgabe 2: DH-Parameter ARMAR-4

	$\boldsymbol{\theta}$ [°]	$\boldsymbol{d}$ [$\boldsymbol{mm}$]	$\boldsymbol{a}$ [$\boldsymbol{mm}$]	$\boldsymbol{\alpha}$ [°]
G1	$\boldsymbol{\theta_1}$	**0**	**0**	**75**



- z_0-Achse des BKS ist Rotationsachse von G1
- G1 und G2 befinden sich an derselben Position
- Rotation um x_0-Achse ergibt nächste Rotationsachse z_1

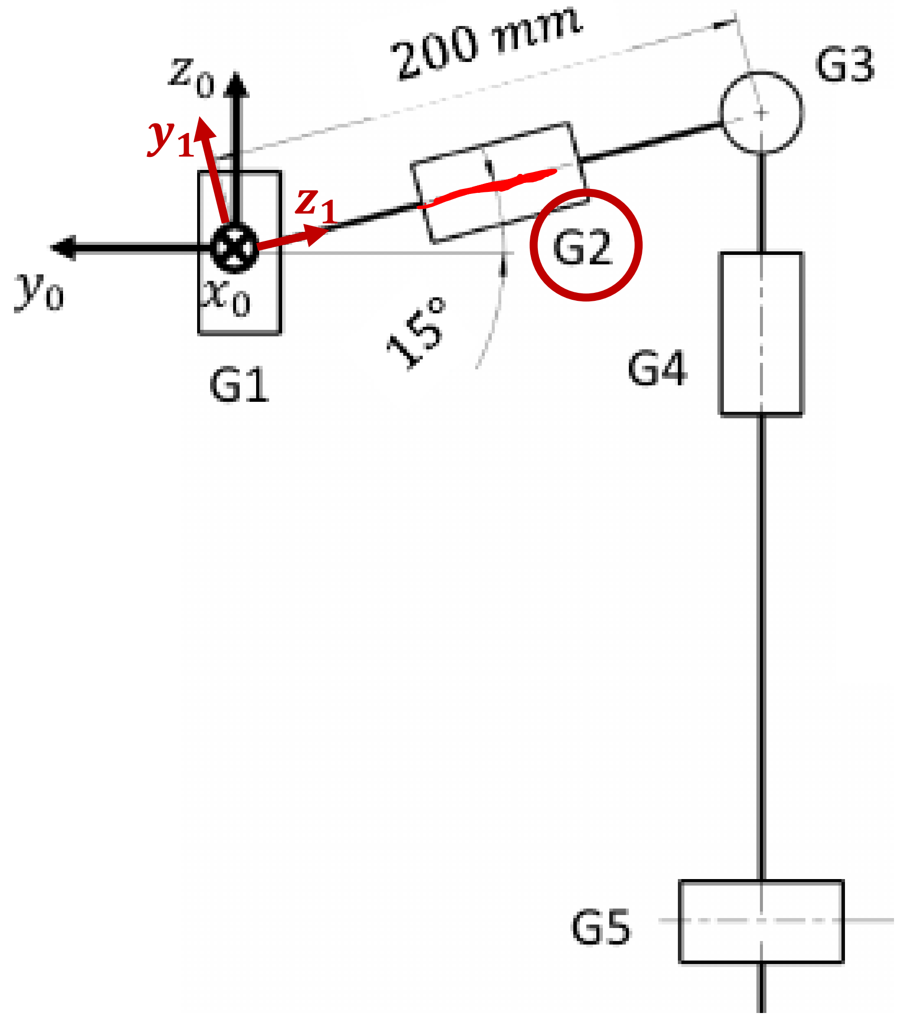
$$\alpha = 90° - 15° = 75°$$

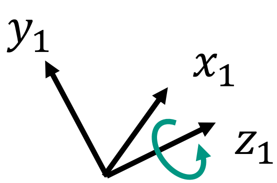


Aufgabe 2: DH-Parameter ARMAR-4

	θ [°]	d [mm]	a [mm]	α [°]
G2	θ_2			

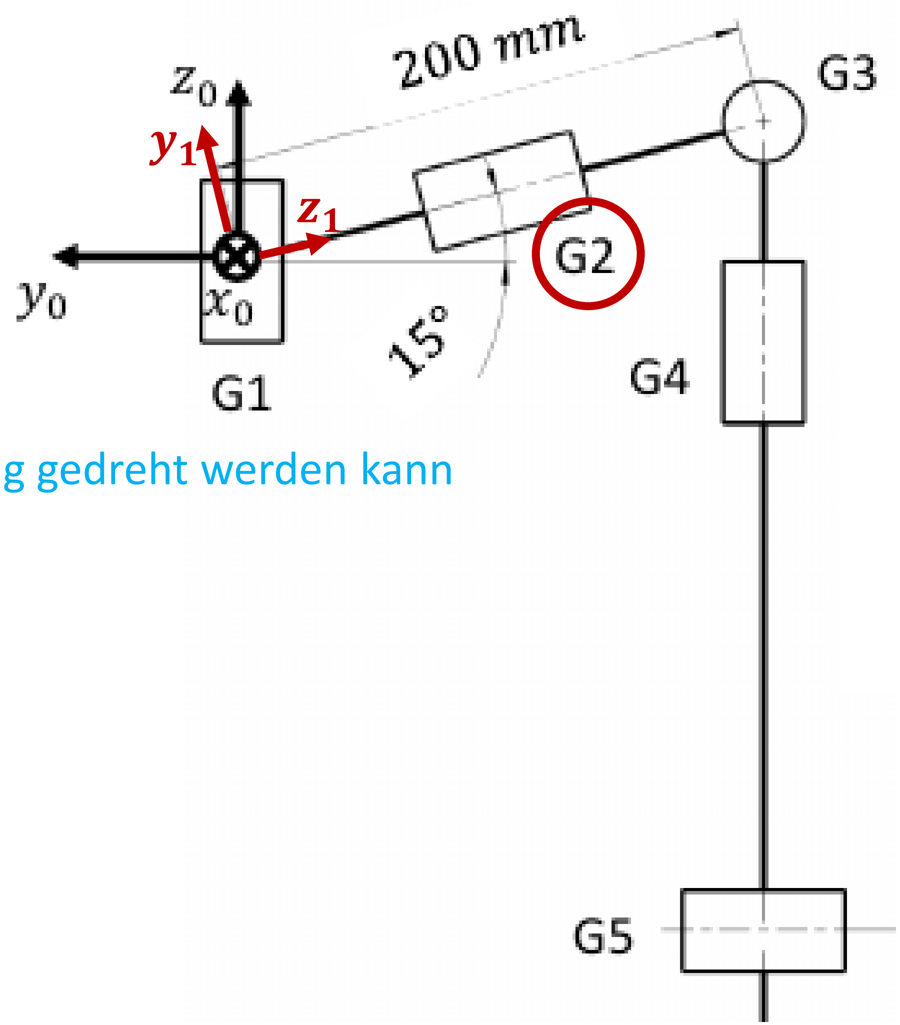
- z_1-Achse ist Rotationsachse von G2



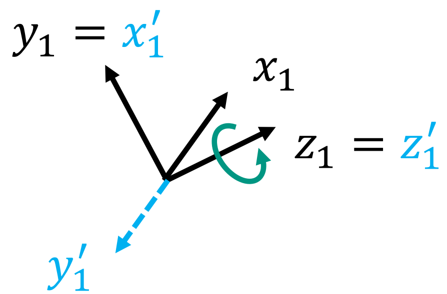


Aufgabe 2: DH-Parameter ARMAR-4

	$\boldsymbol{\theta}$ [°]	$\boldsymbol{d}$ $[mm]$	$\boldsymbol{a}$ $[mm]$	$\boldsymbol{\alpha}$ [°]
G2	$\boldsymbol{\theta_2 + 90}$			

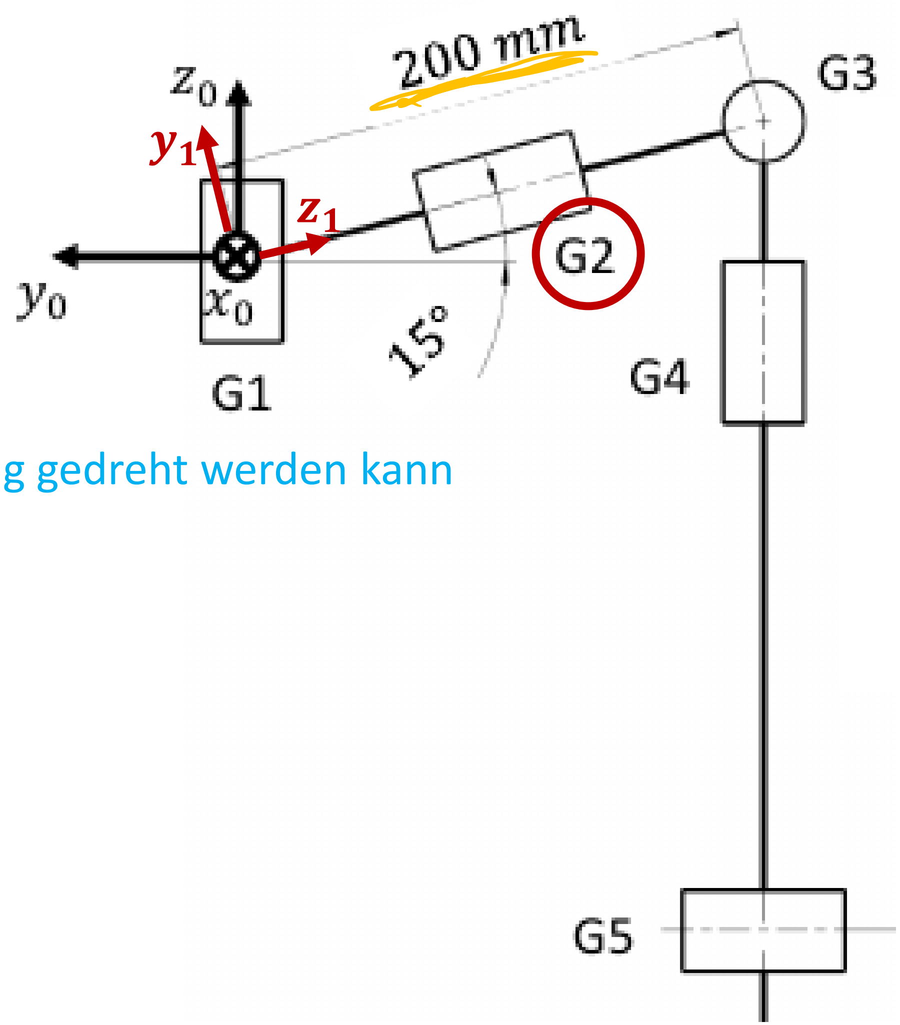


- z_1-Achse ist Rotationsachse von G2
  Aber: Offset von 90°, damit später z_2 richtig gedreht werden kann

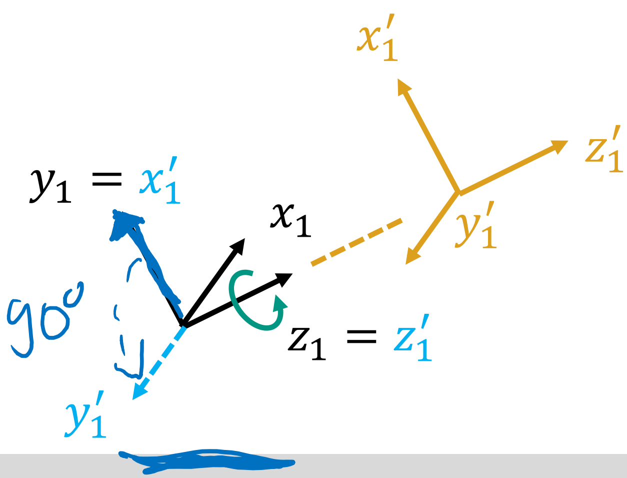


Aufgabe 2: DH-Parameter ARMAR-4

	$\boldsymbol{\theta}$ [°]	$\boldsymbol{d}$ [$\boldsymbol{mm}$]	$\boldsymbol{a}$ [$\boldsymbol{mm}$]	$\boldsymbol{\alpha}$ [°]
G2	$\boldsymbol{\theta_2 + 90}$	**200**	**0**	

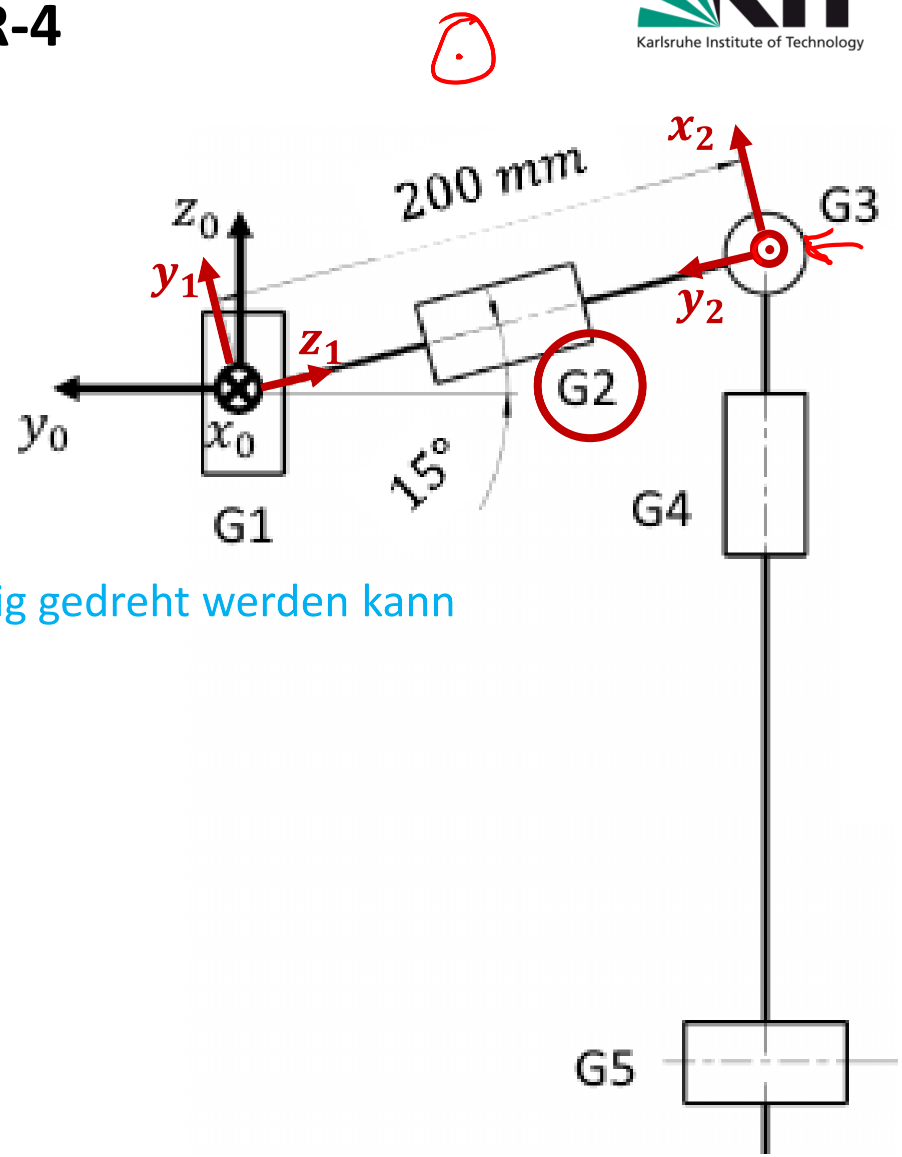


- z_1-Achse ist Rotationsachse von G2
  Aber: Offset von 90°, damit später z_2 richtig gedreht werden kann
- Translation entlang der z_1-Achse

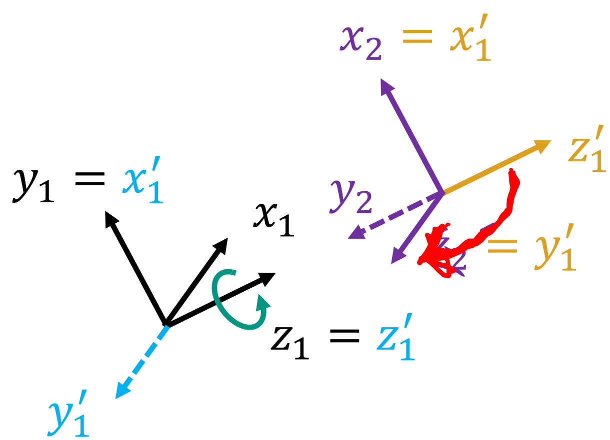


Aufgabe 2: DH-Parameter ARMAR-4

	θ [°]	d [mm]	a [mm]	α [°]
G2	$\theta_2 + 90$	200	0	-90



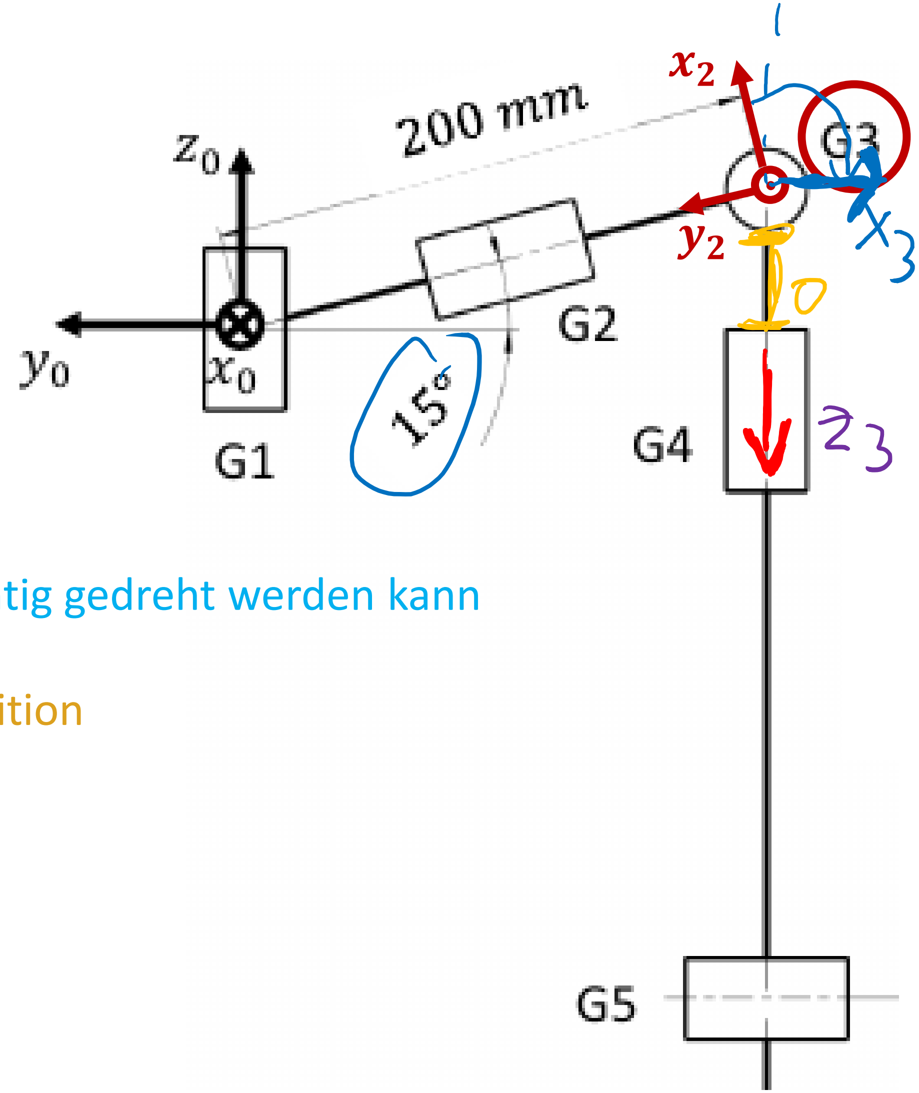
- z_1-Achse ist Rotationsachse von G2
  Aber: Offset von 90°, damit später z_2 richtig gedreht werden kann
- Translation entlang der z_1-Achse
- Rotation um x_1-Achse



Aufgabe 2: DH-Parameter ARMAR-4

	θ [°]	d [mm]	a [mm]	α [°]
G3	$\theta_3 - 105$	0	0	90

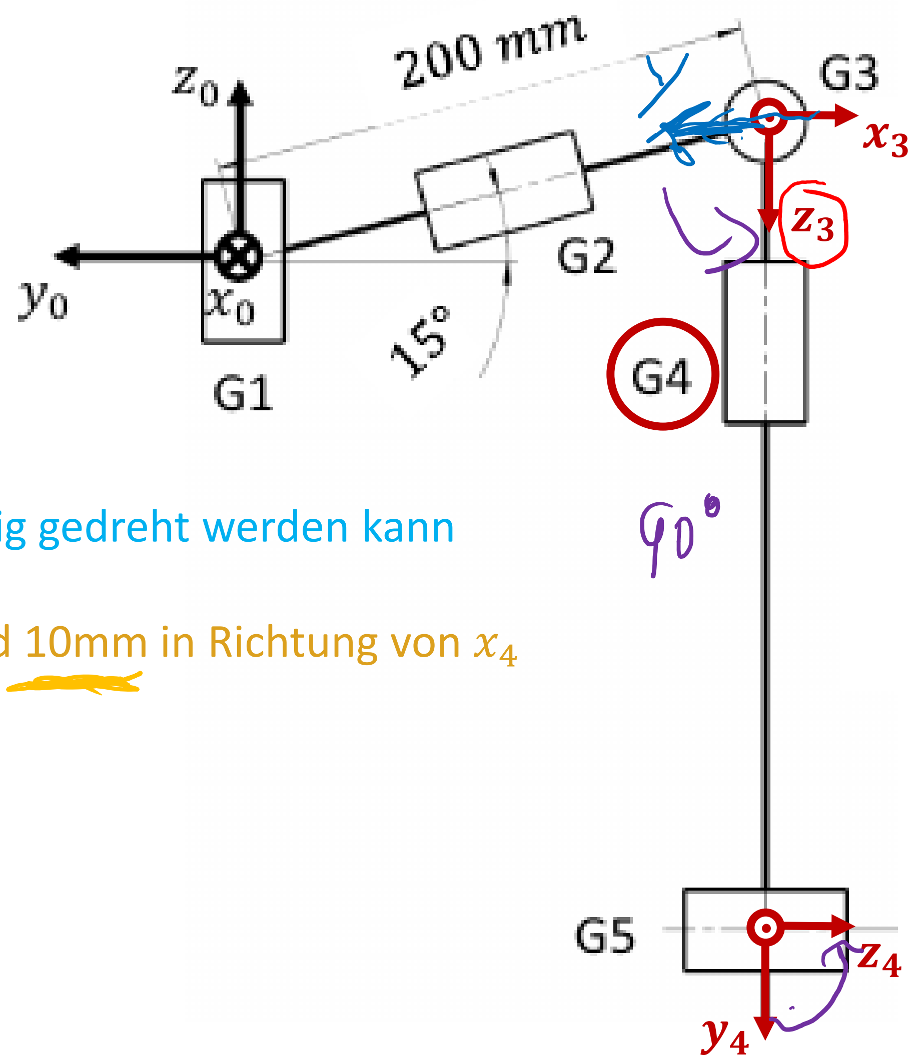
$90° + 15° = 105°$



- z_2-Achse ist Rotationsachse von G3
  Aber: Offset von 105°, damit später z_3 richtig gedreht werden kann
- G3 und G4 befinden sich an derselben Position
- Rotation um x_2-Achse

Aufgabe 2: DH-Parameter ARMAR-4

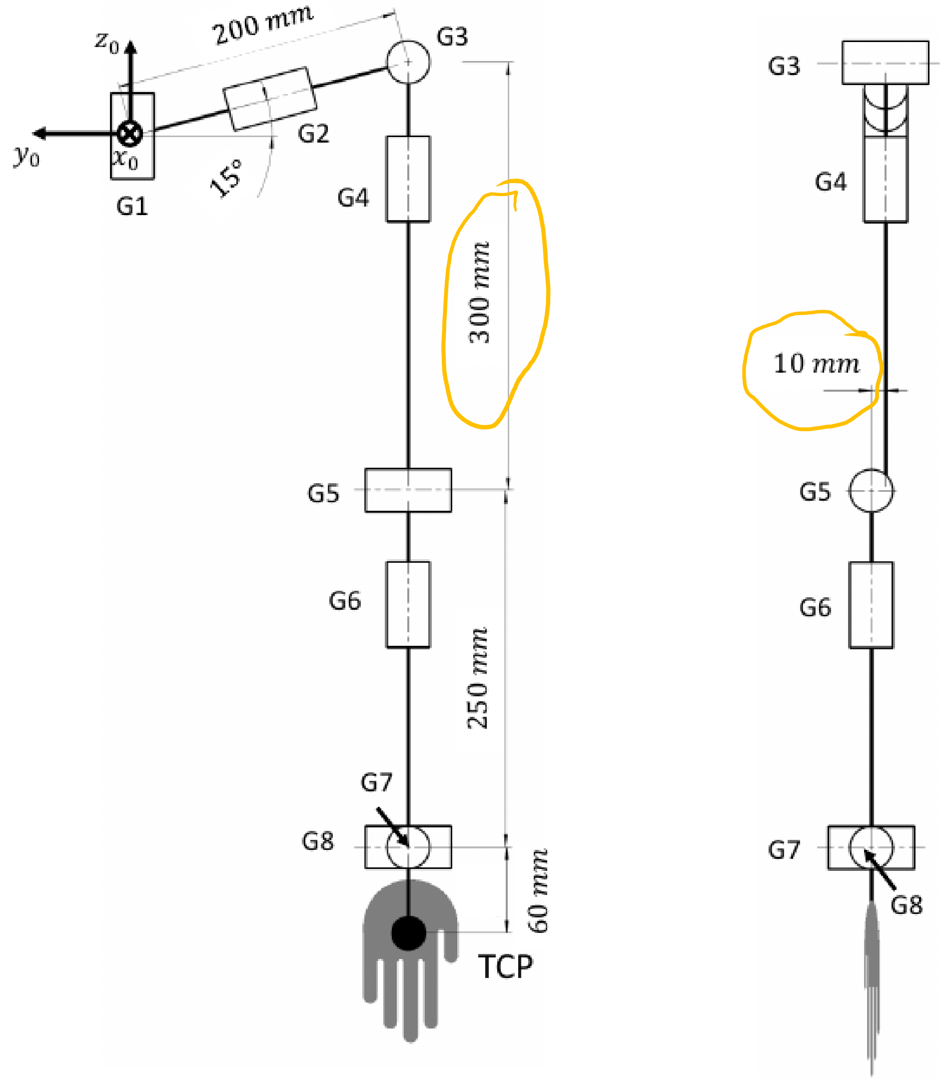
	$\boldsymbol{\theta}$ [°]	$\boldsymbol{d}$ [$\boldsymbol{mm}$]	$\boldsymbol{a}$ [$\boldsymbol{mm}$]	$\boldsymbol{\alpha}$ [°]
G4	$\boldsymbol{\theta_4 + 90}$	**300**	**10**	**90**



- z_3-Achse ist Rotationsachse von G4
  Aber: Offset von 90°, damit später z_4 richtig gedreht werden kann
- Versatz von 300mm in Richtung von z_3 und 10mm in Richtung von x_4
- Rotation um x_4-Achse

Aufgabe 2: DH-Parameter ARMAR-4

	$\boldsymbol{\theta}$ [°]	$\boldsymbol{d}$ $[mm]$	$\boldsymbol{a}$ $[mm]$	$\boldsymbol{\alpha}$ [°]
G1	θ_1	0	0	75
G2	$\theta_2 + 90$	200	0	-90
G3	$\theta_3 - 105$	0	0	90
G4	$\theta_4 + 90$	300	10	90
G5	θ_5	0	0	-90
G6	$\theta_6 - 90$	250	0	-90
G7	$\theta_7 - 90$	0	0	-90
G8	θ_8	0	60	0



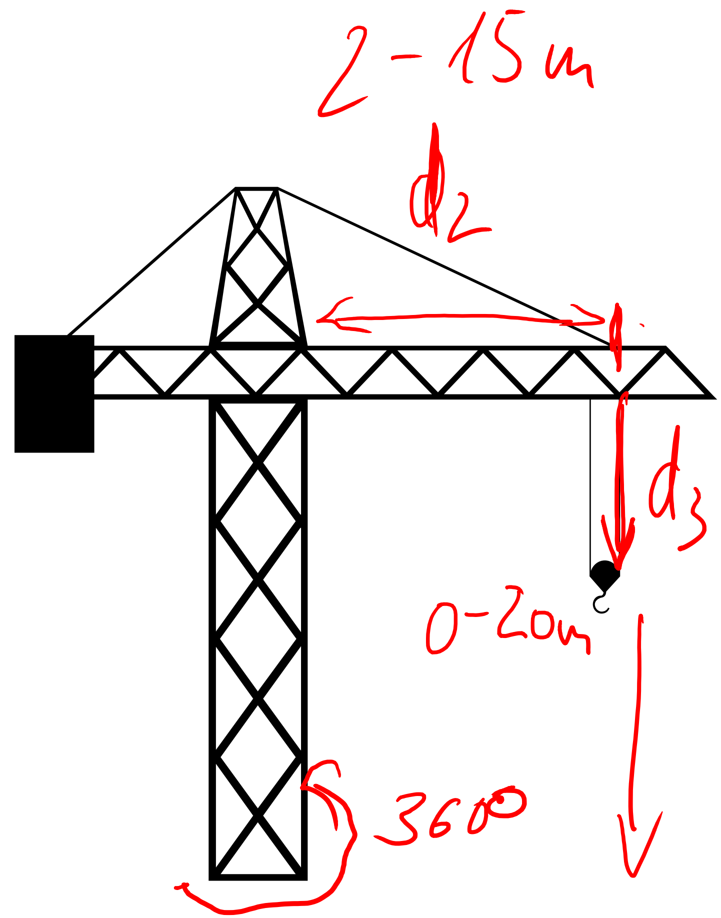
Aufgabe 3: Turmdrehkran

Der Turmdrehkran kann um $360°$ rotieren und ist $20\ \mathrm{m}$ hoch. Der Ausleger ist $15\ \mathrm{m}$ lang, wobei die Laufkatze $2\ \mathrm{m}$ vor der Rotationsachse stoppt. Der Kranhaken kann bis auf den Boden gesenkt werden.

1. Bestimmen Sie die DH-Parameter des Krans und die daraus resultierende Transformationsmatrix des Endeffektors.

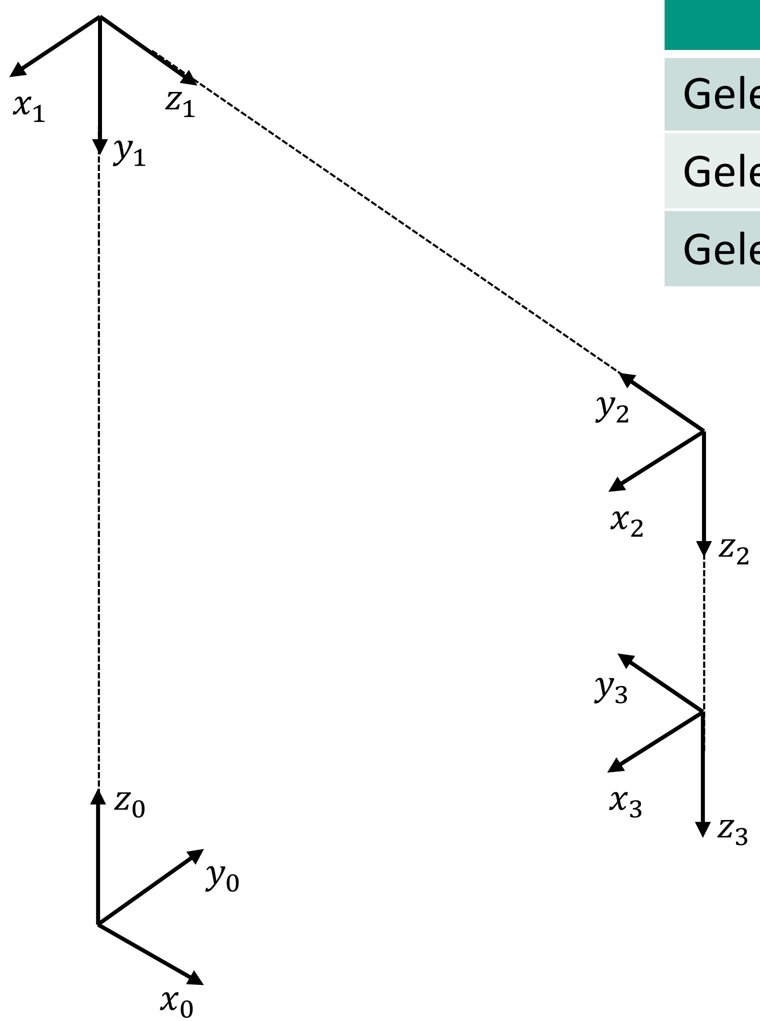
2. Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix des Endeffektors.

3. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Endeffektors …



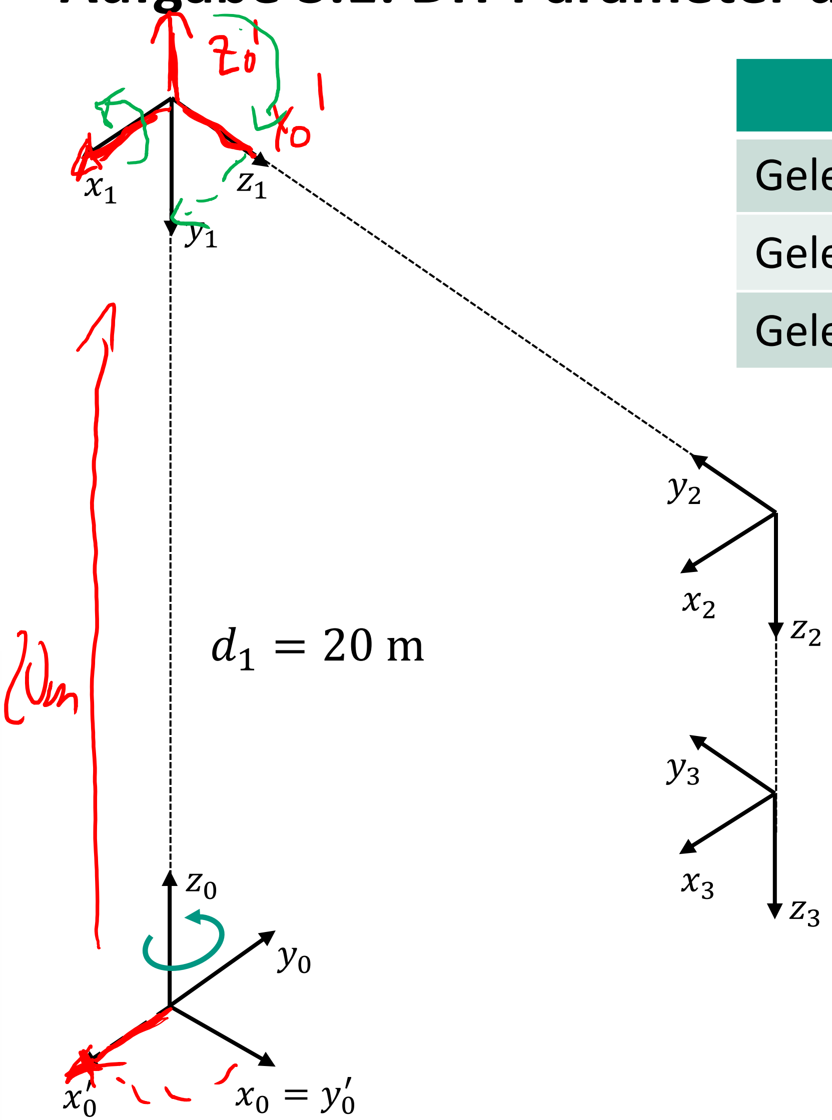
https://thenounproject.com/term/crane/2225/ gespiegelt (CC Attribution 3.0)

Aufgabe 3.1: DH-Parameter des Krans



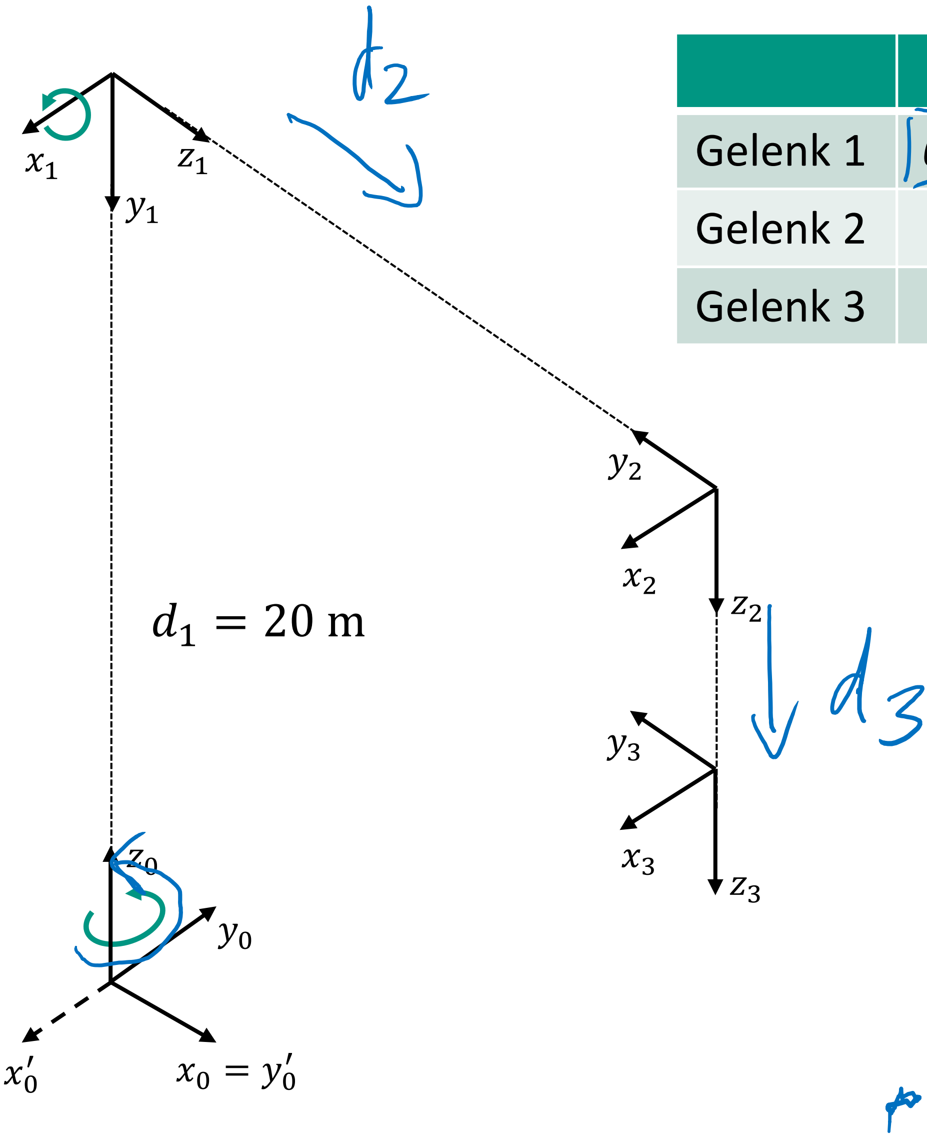
	θ	d	a	α
Gelenk 1				
Gelenk 2				
Gelenk 3				

Aufgabe 3.1: DH-Parameter des Krans



	θ	d	a	α
Gelenk 1	$\theta_1 - 90°$	$20\ \mathrm{m}$	0	$-90°$
Gelenk 2				
Gelenk 3				

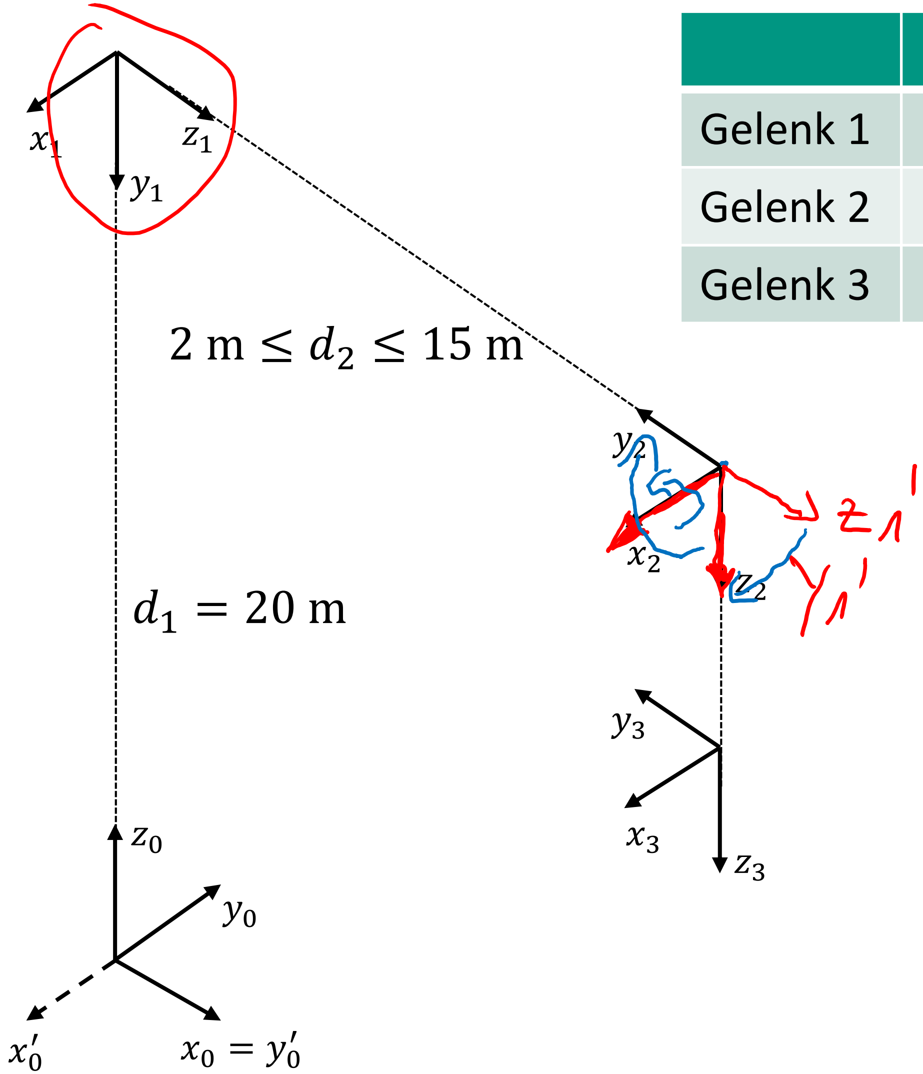
Aufgabe 3.1: DH-Parameter des Krans



	θ	d	a	α
Gelenk 1	$\boxed{\theta_1} - 90°$	20 m	0 m	$-90°$
Gelenk 2		$2\,\text{m} \leq d_2 \leq 15\,\text{m}$		
Gelenk 3				

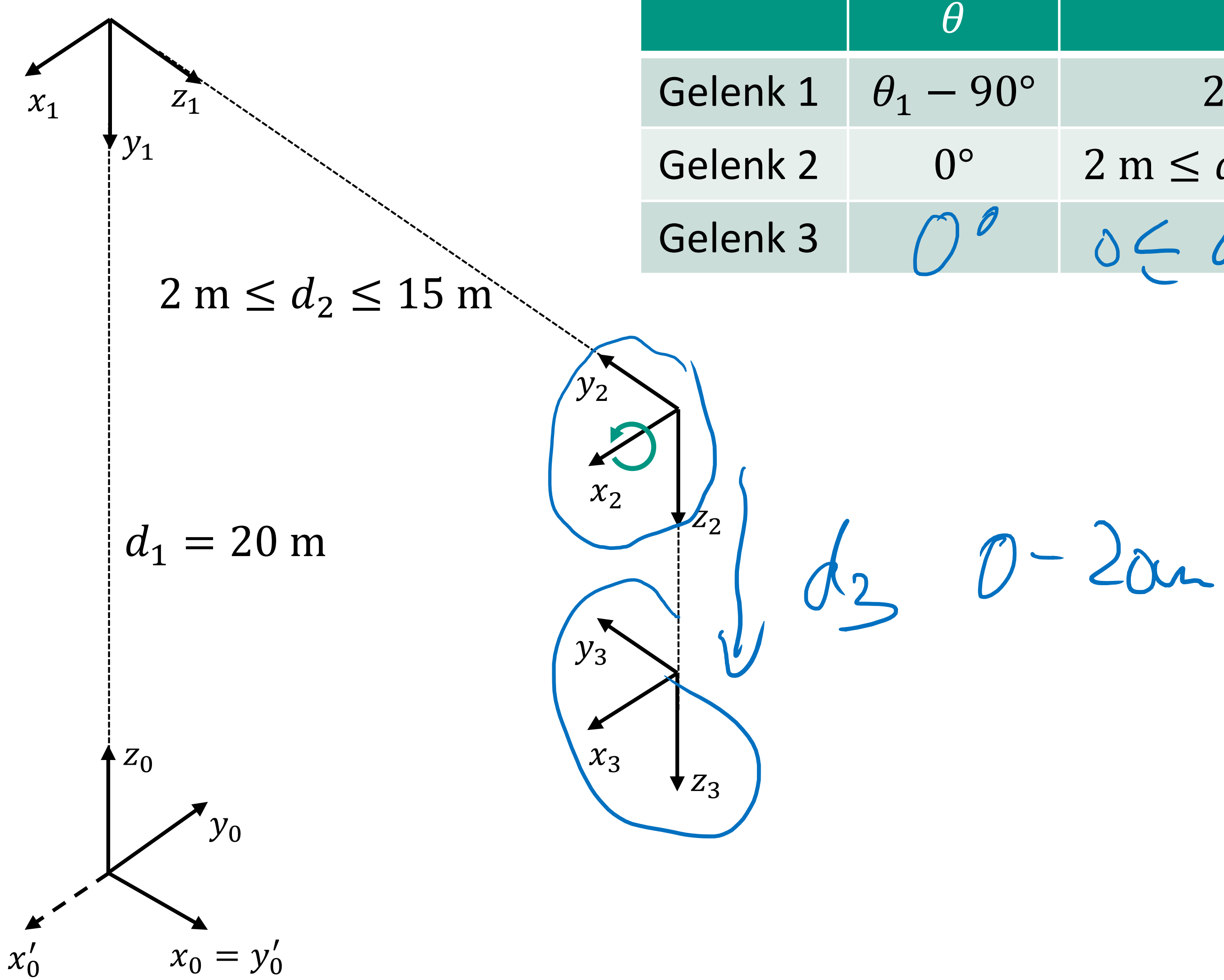
Aufgabe 3.1: DH-Parameter des Krans

	θ	d	a	α
Gelenk 1	$\theta_1 - 90°$	$20\ \mathrm{m}$	$0\ \mathrm{m}$	$-90°$
Gelenk 2	$0°$	$2\ \mathrm{m} \leq d_2 \leq 15\ \mathrm{m}$	0 m	$-90°$
Gelenk 3				

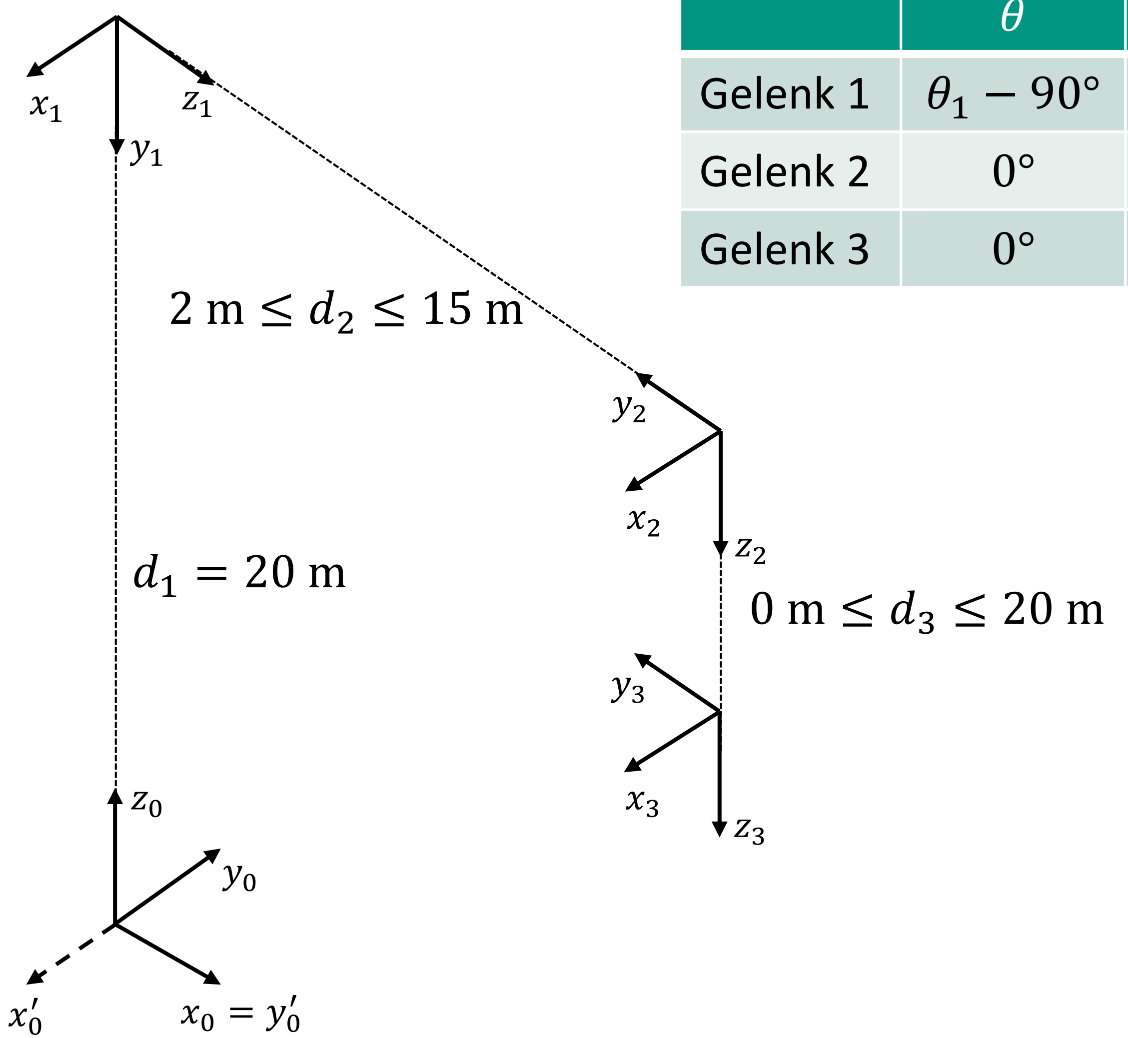


Aufgabe 3.1: DH-Parameter des Krans

	θ	d	a	α
Gelenk 1	$\theta_1 - 90°$	$20\ \mathrm{m}$	$0\ \mathrm{m}$	$-90°$
Gelenk 2	$0°$	$2\ \mathrm{m} \le d_2 \le 15\ \mathrm{m}$	$0\ \mathrm{m}$	$-90°$
Gelenk 3	$0°$	$0 \le d_3 \le 20\mathrm{m}$		

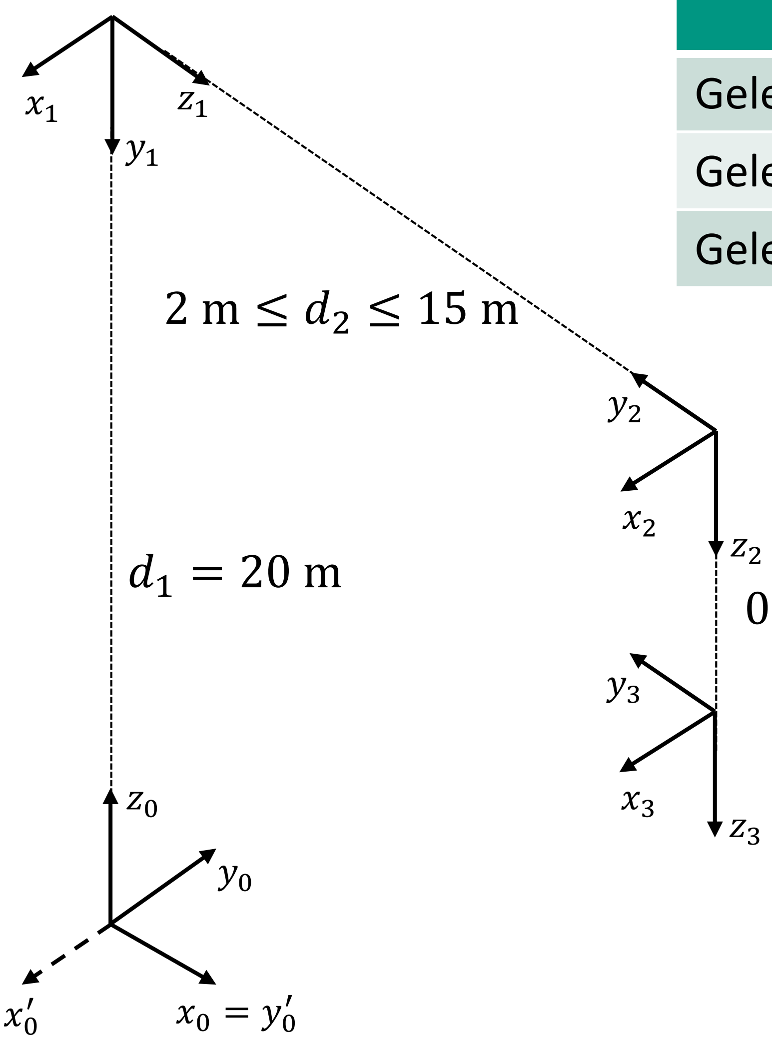


Aufgabe 3.1: DH-Parameter des Krans



	θ	d	a	α
Gelenk 1	$\theta_1 - 90°$	$20\ \mathrm{m}$	$0\ \mathrm{m}$	$-90°$
Gelenk 2	$0°$	$2\ \mathrm{m} \leq d_2 \leq 15\ \mathrm{m}$	$0\ \mathrm{m}$	$-90°$
Gelenk 3	$0°$	$0\ \mathrm{m} \leq d_3 \leq 20\ \mathrm{m}$		

Aufgabe 3.1: DH-Parameter des Krans



	θ	d	a	α
Gelenk 1	$\boxed{\theta_1} - 90°$	20 m	0 m	$-90°$
Gelenk 2	$0°$	$2\text{ m} \le \boxed{d_2} \le 15\text{ m}$	0 m	$-90°$
Gelenk 3	$0°$	$0\text{ m} \le \boxed{d_3} \le 20\text{ m}$	0 m	$0°$

$q = (\theta_1, d_2, d_3)$

Aufgabe 3.1: Transformationsmatrix des Krans

	θ	d	a	α
Gelenk 1	$\theta_1 - 90°$	$20\ \mathrm{m}$	$0\ \mathrm{m}$	$-90°$
Gelenk 2	$0°$	$2\ \mathrm{m} \leq d_2 \leq 15\ \mathrm{m}$	$0\ \mathrm{m}$	$-90°$
Gelenk 3	$0°$	$0\ \mathrm{m} \leq d_3 \leq 20\ \mathrm{m}$	$0\ \mathrm{m}$	$0°$

$${}^{BKS}T_{EFF} = \underline{T_{0,2}} = \underline{T_{0,1}} \cdot \underline{T_{1,2}} \cdot \underline{T_{2,3}}$$

$$T_{0,3} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

DH-Transformationsmatrizen III

Transformation OKS_{i-1} zu OKS_i

$$A_{i-1,i} = R_{z_{i-1}}(\theta_i) \cdot T_{z_{i-1}}(d_i) \cdot T_{x_i}(a_i) \cdot R_{x_i}(\alpha_i) =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \cdot \cos\alpha_i & \sin\theta_i \cdot \sin\alpha_i & a_i \cdot \cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \cdot \cos\alpha_i & -\cos\theta_i \cdot \sin\alpha_i & a_i \cdot \sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3.1: Transformationsmatrix des Krans

	θ	d	a	α
Gelenk 1	$\boldsymbol{\theta_1 - 90°}$	$\mathbf{20\ m}$	$\mathbf{0\ m}$	$\mathbf{-90°}$
Gelenk 2	$0°$	$2\ \mathrm{m} \leq d_2 \leq 15\ \mathrm{m}$	$0\ \mathrm{m}$	$-90°$
Gelenk 3	$0°$	$0\ \mathrm{m} \leq d_3 \leq 20\ \mathrm{m}$	$0\ \mathrm{m}$	$0°$

$$T_{0,1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 - 90°) & 0 & -\sin(\theta_1 - 90°) & 0 \\ \sin(\theta_1 - 90°) & 1 & \cos(\theta_1 - 90°) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.1: Transformationsmatrix des Krans

	θ	d	a	α
Gelenk 1	$\theta_1 - 90°$	$20\ \mathrm{m}$	$0\ \mathrm{m}$	$-90°$
Gelenk 2	$\mathbf{0°}$	$\mathbf{2\ m \leq \boldsymbol{d_2} \leq 15\ m}$	$\mathbf{0\ m}$	$\mathbf{-90°}$
Gelenk 3	$0°$	$0\ \mathrm{m} \leq d_3 \leq 20\ \mathrm{m}$	$0\ \mathrm{m}$	$0°$

$$T_{0,1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 - 90°) & 0 & -\sin(\theta_1 - 90°) & 0 \\ \sin(\theta_1 - 90°) & 1 & \cos(\theta_1 - 90°) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.1: Transformationsmatrix des Krans

	θ	d	a	α
Gelenk 1	$\theta_1 - 90°$	$20\ \mathrm{m}$	$0\ \mathrm{m}$	$-90°$
Gelenk 2	$0°$	$2\ \mathrm{m} \leq d_2 \leq 15\ \mathrm{m}$	$0\ \mathrm{m}$	$-90°$
Gelenk 3	$\mathbf{0°}$	$\mathbf{0\ m \leq d_3 \leq 20\ m}$	$\mathbf{0\ m}$	$\mathbf{0°}$

$$T_{0,1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 - 90°) & 0 & -\sin(\theta_1 - 90°) & 0 \\ \sin(\theta_1 - 90°) & 1 & \cos(\theta_1 - 90°) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \boxed{d_2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{d_3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.1: Transformationsmatrix des Krans

$$T_{0,3} = T_{0,1} \cdot T_{1,2} \cdot T_{2,3}$$

Aufgabe 3.1: Transformationsmatrix des Krans

$$T_{0,3} = \underbrace{T_{0,1} \cdot T_{1,2}} \cdot T_{2,3}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 - 90°) & \sin(\theta_1 - 90°) & 0 & -\sin(\theta_1 - 90°)\, d_2 \\ \sin(\theta_1 - 90°) & -\cos(\theta_1 - 90°) & 0 & \cos(\theta_1 - 90°)\, d_2 \\ 0 & 0 & -1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot T_{2,3}$$

Aufgabe 3.1: Transformationsmatrix des Krans

$$T_{0,3} = T_{0,1} \cdot T_{1,2} \cdot T_{2,3}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 - 90°) & \sin(\theta_1 - 90°) & 0 & -\sin(\theta_1 - 90°)\, d_2 \\ \sin(\theta_1 - 90°) & -\cos(\theta_1 - 90°) & 0 & \cos(\theta_1 - 90°)\, d_2 \\ 0 & 0 & -1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot T_{2,3}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 - 90°) & \sin(\theta_1 - 90°) & 0 & -\sin(\theta_1 - 90°)\, d_2 \\ \sin(\theta_1 - 90°) & -\cos(\theta_1 - 90°) & 0 & \cos(\theta_1 - 90°)\, d_2 \\ 0 & 0 & -1 & \boldsymbol{-d_3 + 20} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.2: Jacobi-Matrix des Endeffektors

$$T_{0,3} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 - 90°) & \sin(\theta_1 - 90°) & 0 & -\sin(\theta_1 - 90°)\, d_2 \\ \sin(\theta_1 - 90°) & -\cos(\theta_1 - 90°) & 0 & \cos(\theta_1 - 90°)\, d_2 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 + 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix J.

$$J = \left(\frac{\partial f}{\partial \theta_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial \theta_n} \right) \in \mathbb{R}^{6 \times n}$$

6 DoF

n Parameter

$$J = \left(\frac{\partial f}{\partial \theta_1} \quad \frac{\partial f}{\partial d_2} \quad \frac{\partial f}{\partial d_3} \right) \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$$

Aufgabe 3.2: Jacobi-Matrix des Endeffektors

$$T_{0,3} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 - 90°) & \sin(\theta_1 - 90°) & 0 & -\sin(\theta_1 - 90°)\, d_2 \\ \sin(\theta_1 - 90°) & -\cos(\theta_1 - 90°) & 0 & \cos(\theta_1 - 90°)\, d_2 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 + 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix J.

- Jede Spalte der Jacobi-Matrix korrespondiert zu einem Gelenk θ_i der kinematischen Kette

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial \theta_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times n}$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f}{\partial d_2} & \frac{\partial f}{\partial d_3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$$

Aufgabe 3.2: Jacobi-Matrix des Endeffektors

$$f(\theta_1, d_2, d_3) = (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)^T$$

$$T_{0,3} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 - 90°) & \sin(\theta_1 - 90°) & 0 & -\sin(\theta_1 - 90°)\, d_2 \\ \sin(\theta_1 - 90°) & -\cos(\theta_1 - 90°) & 0 & \cos(\theta_1 - 90°)\, d_2 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 + 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = -\sin(\theta_1 - 90°)\, d_2$$

$$y = \cos(\theta_1 - 90°)\, d_2$$

$$z = -d_3 + 20$$

Aufgabe 3.2: Jacobi-Matrix des Endeffektors

$$f(\theta_1, d_2, d_3) = (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)^T$$

$$T_{0,3} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 - 90°) & \sin(\theta_1 - 90°) & 0 & \boxed{\begin{matrix} -\sin(\theta_1 - 90°)\, d_2 \\ \cos(\theta_1 - 90°)\, d_2 \\ -d_3 + 20 \end{matrix}} \\ \sin(\theta_1 - 90°) & -\cos(\theta_1 - 90°) & 0 & \\ 0 & 0 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = -\sin(\theta_1 - 90°)\, d_2$$
$$y = \cos(\theta_1 - 90°)\, d_2$$
$$z = -d_3 + 20$$

Aufgabe 3.2: Jacobi-Matrix des Endeffektors

$$f(\theta_1, d_2, d_3) = (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)^T$$

$$T_{0,3} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 - 90°) & \sin(\theta_1 - 90°) & 0 & -\sin(\theta_1 - 90°)\, d_2 \\ \sin(\theta_1 - 90°) & -\cos(\theta_1 - 90°) & 0 & \cos(\theta_1 - 90°)\, d_2 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 + 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = -\sin(\theta_1 - 90°)\, d_2$$
$$y = \cos(\theta_1 - 90°)\, d_2$$
$$z = -d_3 + 20$$
$$\alpha = \operatorname{atan}\left(\frac{o_z}{a_z}\right) = \operatorname{atan}\left(\frac{0}{-1}\right) = 0$$

Aufgabe 3.2: Jacobi-Matrix des Endeffektors

$$f(\theta_1, d_2, d_3) = (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)^T$$

$$T_{0,3} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 - 90°) & \sin(\theta_1 - 90°) & 0 & -\sin(\theta_1 - 90°)\, d_2 \\ \sin(\theta_1 - 90°) & -\cos(\theta_1 - 90°) & 0 & \cos(\theta_1 - 90°)\, d_2 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 + 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = -\sin(\theta_1 - 90°)\, d_2$$
$$y = \cos(\theta_1 - 90°)\, d_2$$
$$z = -d_3 + 20$$
$$\alpha = \operatorname{atan}\left(\frac{o_z}{a_z}\right) = \operatorname{atan}\left(\frac{0}{-1}\right) = 0$$
$$\beta = \operatorname{asin}(-n_z) = \operatorname{asin}(0) = 0$$

Aufgabe 3.2: Jacobi-Matrix des Endeffektors

$$f(\theta_1, d_2, d_3) = (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)^T$$

$$T_{0,3} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 - 90°) & \sin(\theta_1 - 90°) & 0 & -\sin(\theta_1 - 90°)\, d_2 \\ \sin(\theta_1 - 90°) & -\cos(\theta_1 - 90°) & 0 & \cos(\theta_1 - 90°)\, d_2 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 + 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$x = -\sin(\theta_1 - 90°)\, d_2$

$y = \cos(\theta_1 - 90°)\, d_2$

$z = -d_3 + 20$

$\alpha = \operatorname{atan}\left(\frac{o_z}{a_z}\right) = \operatorname{atan}\left(\frac{0}{-1}\right) = 0$

$\beta = \operatorname{asin}(-n_z) = \operatorname{asin}(0) = 0$

$\gamma = \operatorname{atan}\left(\frac{n_y}{n_x}\right) = \operatorname{atan}\left(\frac{\sin(\theta_1 - 90°)}{\cos(\theta_1 - 90°)}\right) = \operatorname{atan}(\tan(\theta_1 - 90°))$

$= \theta_1 - 90°$

Aufgabe 3.2: Jacobi-Matrix des Endeffektors

$$f(\theta_1, d_2, d_3) = (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)^T$$

$$T_{0,3} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 - 90°) & \sin(\theta_1 - 90°) & 0 & -\sin(\theta_1 - 90°)\, d_2 \\ \sin(\theta_1 - 90°) & -\cos(\theta_1 - 90°) & 0 & \cos(\theta_1 - 90°)\, d_2 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 + 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$x = -\sin(\theta_1 - 90°)\, d_2$

$y = \cos(\theta_1 - 90°)\, d_2$

$z = -d_3 + 20$

$\alpha = \mathrm{atan}\left(\frac{o_z}{a_z}\right) = \mathrm{atan}\left(\frac{0}{-1}\right) = 0$

$\beta = \mathrm{asin}(-n_z) = \mathrm{asin}(0) = 0$

$\gamma = \mathrm{atan}\left(\frac{n_y}{n_x}\right) = \mathrm{atan}\left(\frac{\sin(\theta_1 - 90°)}{\cos(\theta_1 - 90°)}\right) = \mathrm{atan}(\tan(\theta_1 - 90°)) = \theta_1 - 90°$

Aufgabe 3.2: Jacobi-Matrix des Endeffektors

$$f(\theta_1, d_2, d_3) = (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)^T$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= -\sin(\theta_1 - 90°)\, d_2 \\ y &= \cos(\theta_1 - 90°)\, d_2 \\ z &= -d_3 + 20 \\ \alpha &= 0 \\ \beta &= 0 \\ \gamma &= \theta_1 - 90° \end{aligned}}$$

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{\dfrac{\partial f}{\partial \theta_1}} & \dfrac{\partial f}{\partial d_2} & \dfrac{\partial f}{\partial d_3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 3}$$

Aufgabe 3.2: Jacobi-Matrix des Endeffektors

$$f(\theta_1, d_2, d_3) = (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)^T$$

$$x = -\sin(\theta_1 - 90°)\, d_2$$
$$y = \cos(\theta_1 - 90°)\, d_2$$
$$z = -d_3 + 20$$
$$\alpha = 0$$
$$\beta = 0$$
$$\gamma = \theta_1 - 90°$$

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{\frac{\partial f}{\partial \theta_1}} & \frac{\partial f}{\partial d_2} & \frac{\partial f}{\partial d_3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_1} = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta_1}, \frac{\partial y}{\partial \theta_1} \frac{\partial z}{\partial \theta_1}, \frac{\partial \alpha}{\partial \theta_1}, \frac{\partial \beta}{\partial \theta_1}, \frac{\partial \gamma}{\partial \theta_1} \right)^T$$

Aufgabe 3.2: Jacobi-Matrix des Endeffektors

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1}(x) = \frac{\partial}{\partial \theta_1}(-\sin(\theta_1 - 90°)\, d_2)$$

$$= -\cos(\theta_1 - 90°)\, d_2$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1}(y) = \frac{\partial}{\partial \theta_1}(\cos(\theta_1 - 90°)\, d_2)$$

$$= -\sin(\theta_1 - 90°)\, d_2$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1}(z) = \frac{\partial}{\partial \theta_1}(-d_3 + 20) = 0$$

Aufgabe 3.2: Jacobi-Matrix des Endeffektors

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1}(x) = \frac{\partial}{\partial \theta_1}(-\sin(\theta_1 - 90°)\, d_2)$$
$$\frac{\partial}{\partial \theta_1}(x) = -\cos(\theta_1 - 90°)\, d_2$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1}(y) = \frac{\partial}{\partial \theta_1}(\cos(\theta_1 - 90°)\, d_2)$$
$$\frac{\partial}{\partial \theta_1}(y) = -\sin(\theta_1 - 90°)\, d_2$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1}(z) = \frac{\partial}{\partial \theta_1}(-d_3 + 20) = 0$$

Aufgabe 3.2: Jacobi-Matrix des Endeffektors

$$\frac{\partial}{\partial\theta_1}(\alpha) = \frac{\partial}{\partial\theta_1}(0) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta_1}(\beta) = \frac{\partial}{\partial\theta_1}(0) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta_1}(\gamma) = \frac{\partial}{\partial\theta_1}(\theta_1 - 90°)$$

$$= 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial\theta_1} = \left(-\cos(\theta_1 - 90°)d_2, -\sin(\theta_1 - 90°)d_2, 0, 0, 0, 1\right)^T$$

Aufgabe 3.2: Jacobi-Matrix des Endeffektors

$$\frac{\partial}{\partial\theta_1}(\alpha) = \frac{\partial}{\partial\theta_1}(0) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial\theta_1}(\beta) = \frac{\partial}{\partial\theta_1}(0) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta_1}(\gamma) = \frac{\partial}{\partial\theta_1}(\theta_1 - 90°)$$
$$= 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial\theta_1} = (-\cos(\theta_1 - 90°)\, d_2, -\sin(\theta_1 - 90°)\, d_2, 0, 0, 0, 1)^T$$

Aufgabe 3.2: Jacobi-Matrix des Endeffektors

$$\frac{\partial}{\partial d_2}(x) = \frac{\partial}{\partial d_2}(-\sin(\theta_1 - 90°)\, d_2)$$

$$= -\sin(\theta_1 - 90°)$$

$$\frac{\partial}{\partial d_2}(y) = \frac{\partial}{\partial d_2}(\cos(\theta_1 - 90°)\, d_2)$$

$$= \cos(\theta_1 - 90°)$$

$$\frac{\partial}{\partial d_2}(z) = \frac{\partial}{\partial d_2}(\alpha) = \frac{\partial}{\partial d_2}(\beta) = \frac{\partial}{\partial d_2}(\gamma)$$

$$= 0$$

Aufgabe 3.2: Jacobi-Matrix des Endeffektors

$$\frac{\partial}{\partial d_2}(x) = \frac{\partial}{\partial d_2}(-\sin(\theta_1 - 90°)\, d_2)$$
$$\frac{\partial}{\partial d_2}(x) = -\sin(\theta_1 - 90°)$$

$$\frac{\partial}{\partial d_2}(y) = \frac{\partial}{\partial d_2}(\cos(\theta_1 - 90°)\, d_2)$$
$$\frac{\partial}{\partial d_2}(y) = \cos(\theta_1 - 90°)$$

$$\frac{\partial}{\partial d_2}(z) = \frac{\partial}{\partial d_2}(\alpha) = \frac{\partial}{\partial d_2}(\beta) = \frac{\partial}{\partial d_2}(\gamma) = 0$$

Aufgabe 3.2: Jacobi-Matrix des Endeffektors

$$\frac{\partial}{\partial d_3}(z) = \frac{\partial}{\partial d_3}(-d_3 + 20)$$

$$= -1$$

$$\frac{\partial}{\partial d_3}(x) = \frac{\partial}{\partial d_3}(y) = \frac{\partial}{\partial d_3}(\alpha) = \frac{\partial}{\partial d_3}(\beta) = \frac{\partial}{\partial d_3}(\gamma)$$

$$= 0$$

Aufgabe 3.2: Jacobi-Matrix des Endeffektors

$$\frac{\partial}{\partial d_3}(z) = \frac{\partial}{\partial d_3}(-d_3 + 20)$$
$$\frac{\partial}{\partial d_3}(z) = -1$$

$$\frac{\partial}{\partial d_3}(x) = \frac{\partial}{\partial d_3}(y) = \frac{\partial}{\partial d_3}(\alpha) = \frac{\partial}{\partial d_3}(\beta) = \frac{\partial}{\partial d_3}(\gamma) = 0$$

Aufgabe 3.2: Jacobi-Matrix des Endeffektors

Karlsruhe Institute of Technology

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f}{\partial d_2} & \frac{\partial f}{\partial d_3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 3}$$

Aufgabe 3.2: Jacobi-Matrix des Endeffektors

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f}{\partial d_2} & \frac{\partial f}{\partial d_3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 3}$$

$$J = \begin{pmatrix} -\cos(\theta_1 - 90°)\, d_2 & -\sin(\theta_1 - 90°) & 0 \\ -\sin(\theta_1 - 90°)\, d_2 & \cos(\theta_1 - 90°) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

unabh. von d_3

Aufgabe 3.3: Geschwindigkeit des Endeffektors (1,1)

- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Endeffektors für die Konfiguration $\boldsymbol{q}$ und die Gelenkwinkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{p}$.

$[\dot{\theta}_1] = \frac{rad}{s}$

$\theta_1 \quad d_2 \quad d_3$

$$\boldsymbol{q}_1 = (90, 10, 10)^T, \boldsymbol{p}_1 = (1, 1, 1)^T$$

$[\dot{d}_2] = [\dot{d}_3] = \frac{m}{s}$

$v = J(q_1) \cdot p_1$

Dynamik

gen. Koordinaten

gen. Kräfte

Aufgabe 3.3: Geschwindigkeit des Endeffektors (1,1)

- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Endeffektors für die Konfiguration $\boldsymbol{q}$ und die Gelenkwinkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{p}$.

$$\boldsymbol{q}_1 = (90, 10, 10)^T, \boldsymbol{p}_1 = (1, 1, 1)^T$$

$$\boldsymbol{v}_1 = J(\boldsymbol{q}_1) \cdot \boldsymbol{p}_1$$

Aufgabe 3.3: Geschwindigkeit des Endeffektors (1,1)

- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Endeffektors für die Konfiguration $\boldsymbol{q}$ und die Gelenkwinkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{p}$.

$$\boldsymbol{q}_1 = (90, 10, 10)^T, \boldsymbol{p}_1 = (1, 1, 1)^T$$

$$\boldsymbol{v}_1 = J(\boldsymbol{q}_1) \cdot \boldsymbol{p}_1$$

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -\cos(\theta_1 - 90°) \cdot d_2 & -\sin(\theta_1 - 90°) & 0 \\ -\sin(\theta_1 - 90°) \cdot d_2 & \cos(\theta_1 - 90°) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.3: Geschwindigkeit des Endeffektors (1,1)

- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Endeffektors für die Konfiguration $\boldsymbol{q}$ und die Gelenkwinkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{p}$.

$$\boldsymbol{q}_1 = (90, 10, 10)^T, \boldsymbol{p}_1 = (1, 1, 1)^T$$

$$\boldsymbol{v}_1 = J(\boldsymbol{q}_1) \cdot \boldsymbol{p}_1$$

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -\cos(90° - 90°) \cdot 10 & -\sin(90° - 90°) & 0 \\ -\sin(90° - 90°) \cdot 10 & \cos(90° - 90°) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.3: Geschwindigkeit des Endeffektors (1,1)

- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Endeffektors für die Konfiguration $\boldsymbol{q}$ und die Gelenkwinkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{p}$.

$$\boldsymbol{q}_1 = ({\color{red}90}, {\color{blue}10}, 10)^T, \boldsymbol{p}_1 = (1, 1, 1)^T$$

$$\boldsymbol{v}_1 = J(\boldsymbol{q}_1) \cdot \boldsymbol{p}_1$$

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.3: Geschwindigkeit des Endeffektors (1,1)

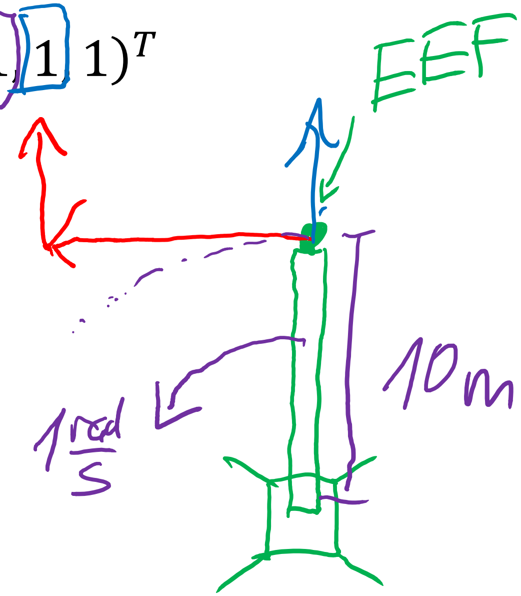
- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Endeffektors für die Konfiguration $\boldsymbol{q}$ und die Gelenkwinkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{p}$.

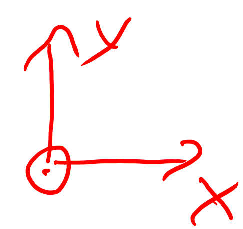
$$\boldsymbol{q}_1 = (\boxed{90}, 10, 10)^T, \boldsymbol{p}_1 = (1, \boxed{1}, 1)^T$$

$$\boldsymbol{v}_1 = J(\boldsymbol{q}_1) \cdot \boldsymbol{p}_1$$

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$\dot{\gamma} = 1 \frac{rad}{s}$





Aufgabe 3.3: Geschwindigkeit des Endeffektors (1,2)

- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Endeffektors für die Konfiguration $\boldsymbol{q}$ und die Gelenkwinkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{p}$.

$$\boldsymbol{q}_1 = (90, 10, 10)^T, \boldsymbol{p}_2 = (-1, -1, 0)^T$$

$$\boldsymbol{v}_2 = J(\boldsymbol{q}_1) \cdot \boldsymbol{p}_2$$

Aufgabe 3.3: Geschwindigkeit des Endeffektors (1,2)

- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Endeffektors für die Konfiguration $\boldsymbol{q}$ und die Gelenkwinkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{p}$.

$$\boldsymbol{q}_1 = (90, 10, 10)^T, \boldsymbol{p}_2 = (-1, -1, 0)^T$$

$$\boldsymbol{v}_2 = J(\boldsymbol{q}_1) \cdot \boldsymbol{p}_2$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

Aufgabe 3.3: Geschwindigkeit des Endeffektors (1,2)

- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Endeffektors für die Konfiguration $\boldsymbol{q}$ und die Gelenkwinkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{p}$.

$$\boldsymbol{q}_1 = (90, 10, 10)^T, \boldsymbol{p}_2 = (-1, -1, 0)^T$$

$$\boldsymbol{v}_2 = J(\boldsymbol{q}_1) \cdot \boldsymbol{p}_2$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.3: Geschwindigkeit des Endeffektors (2,2)

- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Endeffektors für die Konfiguration $\boldsymbol{q}$ und die Gelenkwinkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{p}$.

$$\boldsymbol{q}_2 = \underbrace{(180, 2, 15)^T}, \boldsymbol{p}_2 = (-1, -1, 0)$$

$$\boldsymbol{v}_3 = J(\boldsymbol{q}_2) \cdot \boldsymbol{p}_2$$

Aufgabe 3.3: Geschwindigkeit des Endeffektors (2,2)

- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Endeffektors für die Konfiguration $\boldsymbol{q}$ und die Gelenkwinkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{p}$.

$$\boldsymbol{q}_2 = (180, 2, 15)^T, \boldsymbol{p}_2 = (-1, -1, 0)$$

$$\boldsymbol{v}_3 = J(\boldsymbol{q}_2) \cdot \boldsymbol{p}_2$$

$$\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -\cos(\theta_1 - 90°) \cdot d_2 & -\sin(\theta_1 - 90°) & 0 \\ -\sin(\theta_1 - 90°) \cdot d_2 & \cos(\theta_1 - 90°) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.3: Geschwindigkeit des Endeffektors (2,2)

- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Endeffektors für die Konfiguration $\boldsymbol{q}$ und die Gelenkwinkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{p}$.

$$\boldsymbol{q}_2 = (180, 2, 15)^T, \boldsymbol{p}_2 = (-1, -1, 0)$$

$$\boldsymbol{v}_3 = J(\boldsymbol{q}_2) \cdot \boldsymbol{p}_2$$

$$\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -\cos(180° - 90°) \cdot 2 & -\sin(180° - 90°) & 0 \\ -\sin(180° - 90°) \cdot 2 & \cos(180° - 90°) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.3: Geschwindigkeit des Endeffektors (2,2)

- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Endeffektors für die Konfiguration $\boldsymbol{q}$ und die Gelenkwinkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{p}$.

$$\boldsymbol{q}_2 = (180, 2, 15)^T, \boldsymbol{p}_2 = (-1, -1, 0)$$

$$\boldsymbol{v}_3 = J(\boldsymbol{q}_2) \cdot \boldsymbol{p}_2$$

$$\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.3: Geschwindigkeit des Endeffektors (2,2)

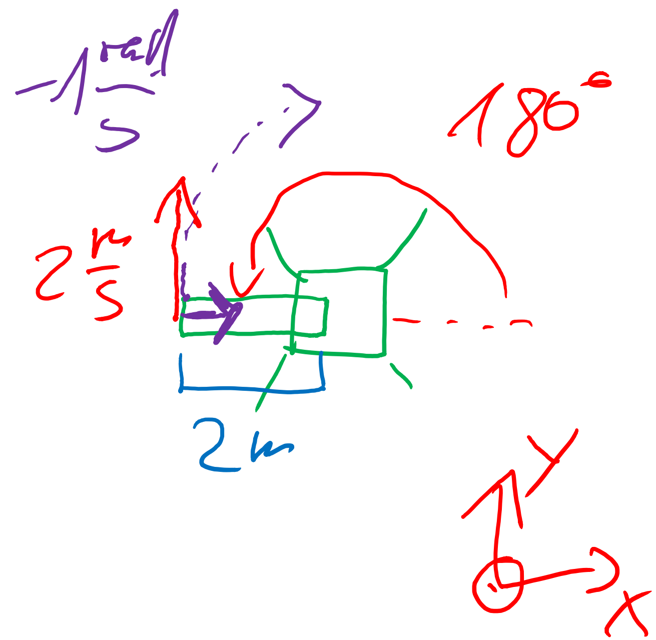
- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Endeffektors für die Konfiguration $\boldsymbol{q}$ und die Gelenkwinkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{p}$.

$$\boldsymbol{q}_2 = (180, 2, 15)^T, \boldsymbol{p}_2 = (-1, -1, 0)$$

$$\boldsymbol{v}_3 = J(\boldsymbol{q}_2) \cdot \boldsymbol{p}_2$$

$$\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$+1 \frac{m}{s}$



Aufgabe 3.3: Geschwindigkeit des Endeffektors (2,3)

Karlsruhe Institute of Technology

- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Endeffektors für die Konfiguration $\boldsymbol{q}$ und die Gelenkwinkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{p}$.

$$\boldsymbol{q}_2 = (180, 2, 15)^T, \boldsymbol{p}_3 = (2, -1, 2)$$

$$\boldsymbol{v}_4 = J(\boldsymbol{q}_2) \cdot \boldsymbol{p}_3$$

H2T

Aufgabe 3.3: Geschwindigkeit des Endeffektors (2,3)

- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Endeffektors für die Konfiguration $\boldsymbol{q}$ und die Gelenkwinkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{p}$.

$$\boldsymbol{q}_2 = (180, 2, 15)^T, \boldsymbol{p}_3 = (2, -1, 2)$$

$$\boldsymbol{v}_4 = J(\boldsymbol{q}_2) \cdot \boldsymbol{p}_3$$

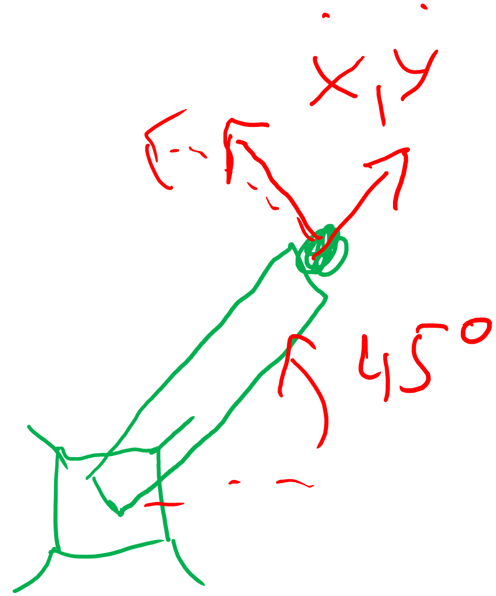
$$\boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.3: Geschwindigkeit des Endeffektors (2,3)

- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Endeffektors für die Konfiguration $\boldsymbol{q}$ und die Gelenkwinkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{p}$.

$$\boldsymbol{q}_2 = (180, 2, 15)^T, \boldsymbol{p}_3 = (2, -1, 2)$$

$$\boldsymbol{v}_4 = J(\boldsymbol{q}_2) \cdot \boldsymbol{p}_3$$



$$\boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$